日本学術振興会科学研究費補助金
基盤研究（B）
高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の研究
課題番号 16300258

高等学校における
離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

最終報告書

平成19年（2007年）3月

代表者　長　崎　栄　三
（国立教育政策研究所　教育課程研究センター　総合研究官）

はしがき

私たちは，平成16年度から3年間の計画で，日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究（B）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』を行ってまいりました。この報告書は，わが国の高等学校の数学科に新たな内容として「離散数学」を導入することに関して毎月 1 回ぐらいの割合で研究会を開き，実証的に研究を行ってきたこれまでの3年間の成果をまとめたものです。

わが国の高等学校の数学教育は，昭和 10 年代後半から微分・積分を唯一の頂点として，できるだけ多くの生徒をこの頂点に到達することを目指してきました。このようなできるだけ多くの生徒に微分･積分の考え方を身に付けさせたいということ自体は高く評価されるべきことと思います。しかし，現在は，高等学校への進学率が約97%に達しており，国立教育政策研究所教育課程センター・高等学校教育課程実施状況調査やOECD･生徒の学習到達度調査（PISA）によって，少なからずの高校生が数学の理解に困難を感じたり，数学への興味・関心や数学の社会的有用性についての意識が低かったりなどという問題点が指摘されております。そこで，このような生徒たちでも数学の学習において成就感を得られるような，また数学の社会的有用性がより一層感じられるような，微分・積分とは異なる数学の頂点を作ることができないかと考えました。「離散数学」はそのような頂点の一つとなる可能性を持っているのではないでしょうか。

この研究は，数学者，数学教師，数学教育研究者の共同で行われており，さらに，研究メンバー以外の多くの方々のご協力を得て行われております。高等学校の数学科の教育課程に新しい内容を導入するかどうかは，数学，社会，生徒などの多方面からの検討が必要だからです。

なお，本報告書に示されている考えは，個人の考えを述べたものであり，所属機関を代表して述べたものではありません。

お忙しい中，本研究にご協力いただきました皆様に心より感謝申し上げます。また，本研究全般を通してお助けいただきました熊岡昌子さんにも心より感謝申し上げます。

平成19年3月

長崎　栄三

研究メンバー

2007年3月現在

研究代表者・分担者

長崎　栄三	国立教育政策研究所・教育課程研究センター（研究代表者）
長尾　篤志	国立教育政策研究所・教育課程研究センター・研究開発部
景山　三平	広島大学大学院教育学研究科
楠岡　成雄	東京大学大学院数理科学研究科
中木　達幸	広島大学大学院理学研究科

研究協力者（五十音順）

熊倉　啓之	静岡大学教育学部
河野　芳文	広島大学附属中・高等学校
正田　実	元文部省
高橋　広明	千葉県立松戸六実高等学校
立花　正男	岩手県教育委員会学校教育室
津島　久美	岡山県立高梁高等学校
西村　圭一	東京学芸大学附属大泉中学校
二宮　裕之	埼玉大学教育学部
萩原　季弘	静岡県立沼津東高等学校
逸見　由紀子	東京都立西高等学校
槙　誠司	山形県教育庁高校教育課
室岡　和彦	お茶の水女子大学附属高等学校
茂出木　祥高	東京都立芝商業高等学校
山口　武志	福岡教育大学教育学部
横澤　克彦	長野県上田千曲高等学校
吉田　亘	東京都中部学校経営支援センター経営支援室

目　次

はしがき		i
研究メンバー		ii
最終報告書の目次		iii
2年次報告書（2006年2月発行）の目次		v
研究の概要		vii
Ⅰ．高等学校への離散数学の導入		1
高校数学への離散数学の導入に関する考え方	長崎　栄三	3
高等学校へ導入する離散数学の有効性について	景山　三平	10
離散数学の数学における位置付け	景山　三平	25
高等学校へ導入する離散数学の教育課程への位置付け	正田　實	34
高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向（中間報告書の要約）		39
Ⅱ．日本の高等学校で指導する離散数学の指導目標・内容・用語の案		41
高等学校における「離散数学」の指導目標・内容・用語の案		43
Ⅲ．授業研究を通した離散数学の授業とその評価		69
離散的なものの見方・考え方の重要性 ～鳩の巣原理の授業における評価方法について～	津島　久美	71
簡単な「鳩ノ巣原理」の考え方と証明－考え方から証明へ－	茂出木　祥高	85
離散グラフの高等学校への導入にともなう評価の研究 －グループ学習による問題づくりを通して－	横澤　克彦	95
離散数学で論証を学ぶ	萩原　季弘	115
Ⅳ．離散数学の教科書記述例		129
「離散グラフ」の教科書記述例に関する一考察	西村　圭一	131
離散グラフ（数学B）の教科書記述例	逸見　由紀子	139
Ⅴ．高等学校への離散数学の導入に関する数学教育関係者の意見		147
「離散数学」を高等学校に導入する視点	大竹　宏二	149
離散数学における問題の教材化について	門脇　聖	151
離散数学の高等学校への導入について	川上　雅子	152
離散数学を高校数学に導入することに関する意見	岸谷　正彦	153
生きている数学、成長し続けている数学を生徒の手に	木下　俊行	155
離散数学を高等学校に導入することについて	篠原　宗弘	157
離散数学の導入について考えること	清水　浩士	159
創造性の基礎の育成と離散数学	田中　勲	160
「異文化共生」「専門教育としての普通科目」の視点から	中澤　進	161
離散数学の高等学校への導入に関して	日野　朋之	163
離散数学の高校数学への導入について	前田　淳一	164
離散数学の高校数学への導入に対する期待と不安	田中　賢治	166

Ⅵ. 高等学校における数学の授業と評価のあり方 169

高等学校における数学的活動と授業改善 熊倉　啓之 171

高等学校数学科における「４つの観点」に基づく評価の工夫について
－「平成14年度高等学校教育課程実施状況調査（数学Ⅰ）」の調査結果をふまえながら－ 山口　武志 181

離散数学の授業における生徒の学習活動の評価 二宮　裕之 190

『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』

（第2年次：中間報告書）

平成18年（2006年）2月発行

目　次

Ⅰ. 高等学校への離散数学の導入　1

高校数学への離散数学の導入に関する基本的な考え方　長尾　篤志・長崎　栄三　3
1.はじめに/2.教育課程への新しい数学の導入についての考え方/3.わが国の高校生の数学に関する現状/4.新しい教材開発の必要性/5.わが国の現在の小中高校の算数・数学科における離散的な内容の扱い/6.高等学校の数学科への離散数学の導入に関しての検討事項/(1)離散数学の特徴/(2)離散数学の学習可能性/(3)離散数学の導入方法/7.おわりに

高等学校へ導入する離散数学の有効性について　景山　三平　10
1.導入の必要性/2.離散数学の特徴/3.命題からみた離散数学の一つの位置づけ/4.育成できる特性/4.1.手段/4.2.方法/5.指導上の留意点/6.問題点/7.離散数学の基礎/8.離散数学内容の提案/(1)原理について/(2)数え上げ/(3)グラフ理論/(4)離散数理を楽しむ/9.具体的な離散教材の構築に向けて/10.授業実践例/参考文献 /離散文献 II/資料

高等学校へ導入する離散数学の教育課程への位置付け　正田　實　25
1.はじめに/2.学習指導要領の変遷/(1)昭和26年の改訂/(2)昭和30年の改訂/(3)昭和35年の改訂/(4)昭和45年の改訂/(5)昭和53年の改訂/(6)平成元年の改訂/(7)平成11年の改訂/3.離散数学の位置付け/(1)変遷からみられる原則的な制約の積み上げ/(2)科目構成についての見通し/(3)離散数学の取り組み

Ⅱ. 高等学校への離散数学の導入に関する講演記録　31

離散数学カリキュラム化のポイント　根上　生也　33
離散数学とは.../離散数学で何を教えたいのか.../ 離散数学の論証指導.../グラフ理論の教材例/離散数学に対する批判/学校数学に対する疑問/現状で実践すると.../数学で学ぶべきこと/離散数学導入に向けて.../離散数学導入における禁じ手

高校教育における離散数学の効用　野崎　昭弘　49
1.はじめに/2.離散数学の柱/3.個別的な話題/3.1 あみだくじ/3.2 17番目の不思議/3.3 ベキ乗の計算法/3.4 暗号/3.5 ベキ乗和の公式

離散数学とは？　成嶋　弘　52
I 離散数学の意味と位置づけ/II 離散数学の分野・領域/(1)基礎数学系の分野/(2)組合せ論系の分野/(3)情報・コンピュータ科学系の分野/III 教育課程/IV どのように整理し昇華し結晶化するか

コンピュータの分野から見たら‥‥　中木　達幸　57
1.はじめに/2.高校数学との関係/3.大学の数学関連学科でのコンピュータ/4.終わりに

離散数学を高校カリキュラムに導入すべし　秋山　仁・酒井　利訓　62
1.なぜ,これからの時代は離散数学が必要なのか?/(a)コンピュータがその威力を発揮できる数学分野が尊重される,その代表例がDM/(b) DMは誰にでも役に立つ数学/(c) DMは最も急速に発展している数学分野/2.DMの研究分野とその応用領域/DMの研究分野/DMが応用されている領域/3.DMを学ぶことでどんな数理的能力が培われるか/(a)知識に頼らず,自力で考える力/(b)本質を抽出する力,表現する力/(c)予測,推理および段取り/4.DMを高校数学カリキュラムに導入した場合,どんな教育効果を期待できるのか/(a)学ぶことが机上の空論ではなくなる！/(b)過去になまけていても,今から頑張ればなんとかなる！/(c)理工系を目指す生徒だけでなく,誰にも必要な数学！/(d)知識より知恵が尊重される/5.DMの導入と授業改革への道/(a)教える数学から自ら学ぶ数学へ/(b)学び手のニーズに適した題材を準備せよ/(c)思考のマンネリを防ぎ,生活への有用性に気づかせよ/6.既にDMを高校カリキュラムに取り入れている米国での実践報告/7.結び

Ⅲ. 高等学校への離散数学の導入に関する数学者の考え　79

離散数学の高等学校への導入について　江川　嘉美　81
離散数学の高等学校導入について　太田　克弘　82
離散数学の高等学校への導入について　大森　博之　83
離散数学について　岡部　恒治　84
離散数学の高等学校への導入について　加納　幹雄　85
ゆとりある数学教育　栗木　進二　86
離散数学の高等学校への導入について　斎藤　明　87
離散数学の導入は論理思考の訓練に最適　神保　雅一　89
鳩ノ巣原理とグラフ理論の導入　寺垣内　政一　90
離散数学の高等学校への導入　原田　昌晃　92
離散数学とアルゴリズム　藤重　悟　93
論理的トレーニングとしての離散数学　宗政　昭弘　97
高等学校に離散数学を導入することに対する私見　森田　康夫　98

Ⅳ. 高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向　105

離散数学に関するアメリカの研究動向　山口　武志　107
－NCTMの「スタンダード」ならびに「1991年報」を中心に－
1.はじめに/2.アメリカにおける離散数学カリキュラムの台頭:史的概観/3.離散数学にかかわる目的:NCTM「スタンダード」の場合/4.離散数学の教材化/5.結語にかえて

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－UCSMP－　二宮　裕之　115
1.シカゴ大学学校数学プロジェクト/2.シカゴ大学学校数学プロジェクトの離散数学

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－Pollak の考え，CPMP－　西村　圭一　136
1 はじめに/2『数学的モデル化と離散数学』/3 Core-Plus Mathematics Project (CPMP)について/3-1 CPMP の理念/3-2 CPMP のカリキュラム構成/3-3 CPMP の離散数学領域について/教材例/(1)グラフモデル/(2)行列モデル/(3)ネットワークの最適化/(4)変化の離散モデル/(5)数え上げのモデル/(6)情報数学/4 おわりに

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－SIMMS－　高橋　広明　154
1.Systemic Initiative for Montana Mathematics and Science Project (SIMMS) について/2.SIMMS-IM における離散数学/3.SIMMS-IM における単元の具体例/(1) Level 1・単元 11(Going in Circuits)/(2) Level 3・単元 11(Our Town)/4. おわりに

イギリスの高等学校における離散数学　長崎　栄三　166
1.はじめに/2.離散数学の試験要目の内容/3.オックスフォード・ケンブリッジ・RSA 試験の「意思決定の数学」の内容/4.離散数学の教科書/『AQA のための離散数学』

Ⅴ. 高等学校等における離散数学の指導の実践例　175

活動を中心とした離散教材の開発　高橋　広明　177
－再帰的思考の活用とアルゴリズムの構成－

離散的なものの見方・考え方の重要性　津島　久美　192
－鳩の巣原理による単元の構成－

「グラフ理論」の単元による指導　横澤　克彦　215
－活動や議論を中心とした授業への転換を目指して－

「グラフ」の学習指導に関する研究　西村　圭一　231
－自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当てて－

ラムゼー定理を主題とした授業　萩原　季弘　262
－ラムゼー定理のゲーム化によって－

研究の概要

基盤研究（B）

研究課題名：高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究

［ 課題番号 16300258 ］

研究組織

研究代表者・分担者

長崎 栄三	国立教育政策研究所・教育課程研究センター（研究代表者）
長尾 篤志	国立教育政策研究所・教育課程研究センター・研究開発部
景山 三平	広島大学大学院教育学研究科
楠岡 成雄	東京大学大学院数理科学研究科
中木 達幸	広島大学大学院理学研究科

研究協力者（五十音順）

熊倉 啓之	静岡大学教育学部
河野 芳文	広島大学附属中・高等学校
正田 実	元文部省
高橋 広明	千葉県立松戸六実高等学校
立花 正男	岩手県教育委員会学校教育室
津島 久美	岡山県立高梁高等学校
西村 圭一	東京学芸大学附属大泉中学校
二宮 裕之	埼玉大学教育学部
萩原 季弘	静岡県立沼津東高等学校
逸見 由紀子	東京都立西高等学校
槙 誠司	山形県教育庁高校教育課
室岡 和彦	お茶の水女子大学附属高等学校
茂出木 祥高	東京都立芝商業高等学校
山口 武志	福岡教育大学教育学部
横澤 克彦	長野県上田千曲高等学校
吉田 亘	東京都中部学校経営支援センター経営支援室

交付決定額

（金額単位：千円）

	直接経費	間接経費	合計
平成16年度	4,900	0	4,900
平成17年度	3,700	0	3,700
平成18年度	3,400	0	3,400
総 計	12,000	0	12,000

研究の目的

本研究の目的は，高等学校の数学において，組合せ論やグラフ理論などの離散数学，フラクタルやその周辺領域に関する数学（以下，「離散数学を中心とした内容」とする）について，新たな教材の開発およびその評価を行うことにある。

具体的には，3年間の研究期間で，第1に，離散数学を中心とした内容において高等学校で学習可能な内容を選択･分析し，第2に，これらの内容に関する諸外国の教育課程や教科書の状況を分析し，第3に，第1，2の成果を踏まえつつ，我が国の「個数の処理」などの内容を発展させ，離散数学を中心とした内容の教材化を行い，第4に，それらの教材を教室において試行し，実際にどの程度の生徒に理解され，どの程度の生徒の興味や関心を高めるものになるかどうかを評価し，そして，第5に，我が国の高等学校の学習指導要領の数学において，それらの内容にかかわる新しい内容領域を設定することを提言する。

研究の内容

研究は，平成16年度から平成18年度の3年間にわたり，高等学校への離散数学の導入に関して多岐にわたる研究が行われた。その結果，高等学校の数学科の必履修科目と選択科目の両方で離散数学を扱うことができる可能性があることが示された。高等学校で指導できそうな離散数学の内容は，必履修科目では，離散グラフや鳩の巣原理，選択科目では，離散グラフとそのアルゴリズムや応用，鳩の巣原理や二値化などである。

3年間の主な研究内容は，次の通りである。

【第1年次】

第1に，我が国の高等学校への「離散数学を中心とした内容の導入」に関する先行研究を収集し，分析した。先行研究はあまり多くはなく，それらの研究は，数学者，または，数学教育研究者の個人によるものがほとんどであり，離散数学を教育課程に位置づけるための組織的な研究ではなく，離散数学の素材，展開例に関する研究が多かった。

第2に，「離散数学を中心とした内容」について，我が国で先駆的な研究をしている4名の数学者から，高等学校への「離散数学を中心とした内容の導入」に関する意見を聴取し，高等学校数学におけるカリキュラムの作成の可能性などについて討議を行った。4名の数学者は，それぞれ，離散数学の高校数学への導入の意義を強調した。一方で，課題として，次のような点が示された。離散数学の指導を通して数学教育の目的としてどのような点を強調するか。離散数学を履修する目標を何に置くのか。離散数学の内容として，何を選択し，それらをどのように配列するか。連続数学と離散数学の関係をどのようにするか。必修とするのか，選択とするのか。

第3に，英米の「高等学校における離散数学を中心とした内容」に関する研究論文，教科書などを収集し，分析した。アメリカでは，NCTMが1989年のカリキュラム･スタンダードで離散数学の学校数学への導入を奨励し，1991年報では学校数学における離散数学の扱いについて詳細な報告をしている。

第4に，我が国の数学者を対象に，「高等学校への離散数学を中心とした内容の導入」に関して自由記述式によって意見を求めた。

【第2年次】

第1に，「離散数学を中心とした内容」について，我が国で先駆的な研究をしている2名の数学者から，高等学校への「離散数学を中心とした内容の導入」に関する意見を聴取し，高等学校数学におけるカリキュラムの作成の可能性などについて討議を行った。2名の数学者は，それぞれ，離散数学の高

校数学への導入の意義を強調した。また，離散数学の社会における応用や，数学とコンピュータの関係が論じられた。第1年次から合計で6名の数学者の意見を聴取した。

第 2 に，英米の「高等学校における離散数学を中心とした内容」に関する教科書を分析した。分析したアメリカの教科書では，離散数学は高等学校における数学学習の主流として連続数学と共に位置づけられ問題解決型となっていたが，イギリスの教科書では，離散数学は非理数系の生徒のための「意思決定の数学」として位置づけられ，例題・問題演習型となっていた。

第 3 に，第 1 年次に行った我が国の数学者を対象にした「高等学校への離散数学を中心とした内容の導入」に関する意見調査を，第 2 年次も実施し，合計で 13 名の数学者から離散数学の導入に関する意見を得た。数学者の間では，高等学校への離散数学の導入に関して意見が賛否両論になっている。

第 4 に，離散数学を題材とした授業を，高等学校において実践をし，高等学校への離散数学の導入の可能性について調べた。題材は，鳩の巣原理，アルゴリズム，グラフなどである。どの授業においても，生徒はグループでの討議に熱心に参加しており，生徒の面からは導入の可能性が大きいことが示唆された。

第 5 に，第 1 年次，第 2 年次の成果をまとめて研究成果報告書『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』を刊行し，関係機関等に配布した。

【第 3 年次】

第 1 に，教育課程に新しい数学を導入する際の基準としての数学教育の目的，すなわち，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の 3 つの目的に沿って，離散数学の導入を検討した。第 1 年次，第 2 年次の研究を通して，高等学校の数学科を念頭に置いた場合，離散数学の人間形成的目的としては，論理的思考力や表現力の育成が期待でき，実用的目的としては，数学的モデル化能力や現実問題の数学的問題解決能力の育成が挙げられた。本年度は，文化的目的を明確にするために，数学文化としての離散数学の発展の歴史を考察した。

第 2 に，離散数学を題材とした授業を，高等学校において実践をし，その評価のあり方を調べた。題材は，鳩の巣原理，離散グラフなどである。評価は，授業中の観察，適用問題のワークシートの分析，生徒の問題づくりの分析，質問紙調査による生徒の意識や態度の分析などで行なった。

第 3 に，離散数学を題材とした教科書の記述例をもとに，中学校・高等学校において授業実践をし，その結果をもとにその教科書の記述のあり方を調べた。題材は，離散グラフで，必履修と選択の両者について検討した。

第 4 に，高等学校で指導する離散数学の指導目標・内容・用語に関するメンバーの意見をまとめた。離散数学を扱う科目としては，必履修科目，選択科目の両者に渡った。必履修科目としては，「社会生活における数理的な考察」などの項目が挙げられ，選択科目としては，「集合と論理」，「離散グラフとその利用」，「行列とその応用」などの項目が挙げられた。その内容としては，必履修科目の「社会生活における数理的な考察」においては，離散グラフや鳩の巣原理など，選択科目の「集合と論理」においては，鳩の巣原理，二値化など，「離散グラフとその応用」においては，離散グラフとそのアルゴリズムや応用などである。

第 5 に，高等学校の数学教育関係者を対象にした「高等学校への離散数学を中心とした内容の導入」に関する意見調査を実施し，合計で 12 名の数学教育関係者から離散数学の導入に関する意見を得た。数学教育関係者は，高等学校への離散数学の導入に関して肯定的な意見であった。

第 6 に，離散数学を題材とした授業を含めて，高等学校の授業を改善する視点として，数学的活動を重視した授業，評価の観点を利用した評価の工夫，生徒の数学的活動の評価についてまとめた。

第 7 に，第 3 年次の成果をまとめて研究成果報告書『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究　最終報告書』（本書）を刊行した。

Ⅰ．高等学校への離散数学の導入

高校数学への離散数学の導入に関する考え方

長崎　栄三
国立教育政策研究所教育課程研究センター

【要約】数学科の教育課程に新たな内容を導入する場合には，数学，社会，生徒という 3 つの面，及び，教育課程への導入方法という点から検討する必要がある。

わが国の高校生の数学に対する意識はあまり高くはないことがいろいろな調査から明らかになって来ている。一方，わが国の高等学校数学科の内容は主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を頂点とする内容で構成されており，そこまで学習しない生徒にとって，何のために数学を学習しているのかが分かりにくくなっているのではないか，との指摘がある。そこで，あまり多くの予備知識がなくても，それぞれの生徒が自分なりの方法で問題にアプローチでき，じっくり考えることのできる内容を新たに準備する必要があると考えた。離散数学は，実生活とのつながりも強く，しかも，多くの生徒が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題が少なくない。わが国の高等学校の数学科の現状を変える可能性を離散数学が持っていると我々は考えた。そこで本稿では，高等学校数学科への離散数学の導入に関する検討事項として，教育目的，指導内容，指導方法，評価方法などの面から検討する必要があることを述べた。

1．はじめに

数学科の教育課程は，数学，社会，生徒などの変化を要因として改訂される。教育課程一般としては，教育課程を構成する上では，文化遺産の体系，社会の要請，学習者の特性の 3 つの座標軸が考えられている（扇谷他，1981，p.7)。ここでは文化遺産の体系が，数学である。つまり，数学，社会，生徒のいずれかが変われば，数学科の教育課程はその変化に応じて変わらざるを得ないのである（ハウスン他，1987)。

わが国の高等学校数学科の内容は，昭和 10 年代後半から約 60 年余り変わらずに，現在でもその内容は「微分積分」を最終的な到達点としてきている。戦後，線形代数などが導入されたが，基本的には連続数学の微分積分を学ぶことが主流を成している。

ところが，今日，数学は，20 世紀後半から，「一つずつばらばらに孤立した対象を扱う新しい数学」である離散数学が急速に発展し，社会ではこの新しい数学の応用範囲が急激に広がっている（例えば，秋山，2005)。

社会は，高度情報化社会，少子高齢化社会などへと大きく変容している。同時に，わが国は成熟した民主主義社会として急激に変化する社会にあって，価値観が多様化し，その中で日々人間は様々な判断を迫られている。それだけにこれからの人間は自ら考え判断することが一層重要になってくる。

さらに，高等学校への進学率は現在，97%を越えており，その中の大半の生徒は非理工系の生徒である。社会も高等学校も変わり，当然，高校生も変わって来ている。特に，最近の高校生の数学に対する態度はあまり肯定的ではなく，しかも数学の社会的有用性に対する意識も低い（国立教育政策研究所，2004)。

このような数学，社会，生徒の現在の状況は，とりわけ，高等学校の数学教育のあり方に再考を

迫っている。

2．新しい教材開発の必要性

高等学校の学習指導要領は戦後 7 回全面的に改訂がされている。昭和 35 年以降の高等学校数学科の学習指導要領の内容をみれば，中学校からの移行や削除などの変化や科目間での移行などはあるものの全体としてあまり大きな変化はない。これは，高等学校卒業までに身に付けさせたい数学の内容が戦後 60 年間であまり変化しなかったということであろう。しかしながら，高等学校への進学率が 97%を超える現在，高等学校数学科を再考する必要が出てきているようである。(長尾，2004)

（1）数学科では微積分が唯一の頂点

第一は，数学科の内容が主に理科系の生徒が学習する微分法，積分法を唯一の頂点とする内容で構成されている点にある。このような構成では，微分法，積分法まで学習しない生徒は，最終到達点の頂点まで至らずに高等学校数学の学習を終えることになり，「何のためにこの内容を学習したのか」が分かりにくくなっている。高等学校数学にもいくつかの複数の頂点を置き，それぞれの頂点まで到達させること，つまり，次の内容を学ぶための準備のためではなく，そこまでに学習した内容を活用し問題を解決したり，生徒自身に内容を発展させその面白さを感じ取らせたりすることが必要ではないだろうか。現行の学習指導要領での数学基礎は，高等学校数学科に複数の頂点をおくための試みと考えることもできる。

（2）数学をじっくり考えさせたい

第二は，第一とも深く関係していることではあるが，数学科の内容に取り組むにはそれ以前に学習した多くの内容を確実に理解していることを前提としていることである。ところが，平成 14 年度教育課程実施状況調査数学 I の通過率の平均は約 50%であり，「数学の勉強がよく分かる，または，だいたい分かる」と回答した生徒数の割合は約 35%であった。もちろん，先に述べたように数学が分かるか否かが数学の好感度に影響しているとすれば，数学が分かることは当然ながら重視しなければならない。ただし，数学が分かることと問題を解けることは完全には一致していないことに注意しなければならない。分かっていなくても，解法パターンに当てはめて数学の問題を解くことは可能だからである。そこで，数学が分かるようになるためには，基本的な概念を批判的に，試行錯誤しながら学ぶことが必要である。中学校の内容を十分に身に付けず高等学校に入学してくる生徒が少なくないと言われる現状を考慮すれば，あまり多くの予備知識を仮定しなくても，それぞれの生徒が自分なりのやり方で試行錯誤しながらアプローチでき，じっくり考えることのできる内容をも準備する必要がある。

（3）離散数学への着目

離散数学とは，有限で離散的な構造を扱う数学であり，グラフ理論，組合せ論，計算幾何学，アルゴリズム論，最適化問題などをいい，コンピュータの発達と相まって発展してきた数学の分野である。現在，社会の種々の分野で離散数学が活用されており，離散数学の社会的有用性の高さが示されていると言えよう。

離散数学の内容や特徴などに関する詳しい説明は別書に譲るが，離散数学の内容や問題の特徴について，次のようなことがあげられている。「多くの予備知識を仮定しなくても解決できる問題が多い」，「いろいろな方法で解決できる問題が多い」，「問題の解決を通して，数学の有用性をはじめ，数学的な見方や考え方のよさを感じ取ることができる」，「比較的新しい数学の分野であるので，学

習したことが研究の最先端と重なることもある。したがって，数学の研究の面白さに直に触れることができる」などである。

離散数学という新しい数学は，数学としての発展性も豊かであり，実生活との結びつきも強く，しかも，そこには多くの高校生が改めて新鮮な気持ちで取り組めそうな問題が少なくない。離散数学は，わが国の高等学校の数学科の新しい内容として現状を変える可能性が大いにあると考えられる。

3．わが国の現在の小中高校の算数・数学科における離散的な内容の扱い

現行の小中高校の算数・数学科の学習指導要領には，「離散数学」という内容領域はない。しかし，離散数学を，有限で離散的な構造を扱う数学で，重い計算をするよりは言葉で考え論証する数学であると捉えると，現行の小中高校の算数・数学科の内容にも離散的な内容はある。

（1）小学校算数

第1学年の数と計算は，ものの個数を数えることの活動を通して進めるなど自然数を扱っているので離散的と見ることができ，また，第3学年から5学年にかけての資料の分類，整理などの統計的な内容にも離散的なものが含まれている。

第3学年から5学年にかけての平面図形の敷き詰めは，帰納的な考えではあるが，離散的な思考を行っていると見ることができる。

（2）中学校数学

「数と式」領域の整数関係は，基本的には離散的である。さらに，中学校2年の確率の樹形図の利用は離散的である。

（3）高等学校数学

高等学校の数学の各科目には，多くの離散的な内容が含まれている。

①数学基礎：数学と人間の活動，社会生活における数理的な考察，身近な統計

数と人間，図形と人間，社会生活と数学，身近な事象の数理的な考察，資料の整理，資料の傾向の把握

②数学A：集合と論理，場合の数と確率

対偶，背理法，順列・組合せ，二項定理，数学的確率・公理論的確率，余事象

③数学B：数列，統計とコンピュータ，数値計算とコンピュータ

漸化式と数列，度数分布，相関図，アルゴリズム

④数学C：行列とその応用，確率分布

行列，確率の計算，条件つき確率，二項分布，標本調査

（4）数学科の新しい内容としての離散数学

これまで述べてきたようにすでにわが国の算数・数学科の教育課程には多くの離散的な内容が含まれている。しかしながら，私たちは，これらを含めて，新たに鳩の巣原理の有用な考え方やグラフ理論などを取り入れたらどうかと考えている。以下では，これまでの離散的な内容と，鳩の巣原理や数え上げの原理などの基本原理及びグラフ理論などの新しい離散数学の内容とを合わせて，「離散数学」と言うことにする。

次に，改めて，このような離散数学を高等学校の数学に導入すべきかどうかを検討する。

4．教育課程への新しい数学の導入についての考え方

教育課程に新しい数学を導入するには，少なくとも，その教育目的と指導内容・指導方法・評価方法の２つの面から検討する必要がある。後者の，指導内容・指導方法・評価方法は，単元構成とも言える。

（1）教育目的からの検討

数学教育の目的は，最近では，主として，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的の３つから語ることができる（日本数学教育学会教育課程委員会，2006)。

数学教育の目的としての，人間形成的目的とは，数学を通して人間が持っている能力などを育てようとするものであり，実用的目的とは，数学を使うための知識や能力を育てるものであり，文化的目的とは，数学のよさを知らせるものである。それぞれの目的は，それぞれの特徴を持ってはいるが，当然ながら互いに重複してもいる。具体的には，次のようなものである（長崎他編，2007)。

数学教育の人間形成的目的：数学を通して人間を育てる

自律的な態度を養う，真理感情を養う，考える力を養う，判断力を養う，考え合う力を養うなど。

数学教育の実用的目的：数学を使えるようにする

数，量，図形に関する知識を身に付けさせる，計算力を養う，表やグラフや図で表現し解釈する力を養う，数学的モデル化の力を養う，問題解決の力を養うなど。

数学教育の文化的目的：数学のよさを知らせる

数学の偉大さを知らせる，数学の社会的有用性を知らせる，数学の美しさを味わわせる，数学の楽しさを味わわせるなど。

普通教育において，新しい内容を教育課程に導入しようとする場合には，その内容が，このような，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的という３つの目的を満たしていることが必要である。専門教育においては，これらのうち，主として実用的目的が重視されるが，普通教育においては教育目的を総体的に捉える必要がある。

離散数学を高等学校の数学科に導入する際には，必履修科目への導入については，上記の３つの目的を満たす必要がある。選択科目への導入については，特に実用的目的，すなわち，将来の数学の研究，諸科学の研究，職業への応用などについて明らかにしておく必要がある。

（2）教育内容・指導方法・評価方法からの検討

新しい数学が，(1) での述べた教育目的を満たした場合，今度は，それを指導内容・指導方法・評価方法から検討する必要がある。これは言い方を換えると，単元として構成できるかどうかを検討することである。

新しい数学を単元として構成するには，大きく分けると，２つの方法がある。一つは，それを既存の単元の中に埋め込む方法であり，もう一つは，それによって新しい単元を構成する方法である。

既存の単元の中に埋め込む場合には，新しい内容と性格が類似した単元を探し，その単元の一つの項として扱うことになる。この場合には，新しい内容は分量としてはさほど大きくなく，１つの原理や定理，その応用問題数題などで構成され，1，2時間で指導できるものであろう。このような例としては，平成１１年の高等学校学習指導要領の改訂で，相似形の面積比・体積比や球の表面積・体積が中学校数学から数学Ⅰの「図形と計量」に移行されたことがあげられよう。

新しい単元を構成する場合には，その単元を一定のまとまりのある内容としなければならない。

このような新しい単元を構成するには，「少なくとも 3 種の素材が必要である。すなわち，導入のための素材，展開のための素材，評価のための素材の三つである」（島田，1970）とされている。さらに，それらについて，それぞれ次のように説明されている。「導入問題の問題の意味と必要性が，それ以前の学習によって興味あるものとしてわかりうること」，「1か月ぐらいの授業で，従前の学習を基礎としてその内容の中心定理に達することができ，この定理によって，導入問題の解法に対するアルゴリズムが得られること」，「その内容が契機となって新しい問題に発展しうること。このことは，その展開の過程に数学として重要ないろいろな考え方の具体例を含んでいるということである」とされている。なお，ここでの単元構成においては，背景となる指導方法として，問題解決学習が前提とされている。

離散数学を既存の単元に埋め込む場合には，内容の類似性からすると，鳩の巣原理を「集合と論理」に入れるようなものであり，考え方の類似性からすると，離散グラフを「社会生活における数理的な考察」に入れるようなものである。

離散数学で新しい単元を構成する場合には，そこでの目的，中心となる概念，身に付ける技能，応用できる問題などを明確にしなければならない。

5．高等学校の数学科への離散数学の導入に関しての検討事項

わが国の高等学校の数学科の教育課程に離散数学の新しい内容を導入するためには，これまで明らかにしてきたような，現在の数学科の教育課程の特徴や高校生の数学学習の現状に加え，離散数学との関わりで次のようなことを明らかにする必要がある。これらの研究は，数学者，数学教師，数学教育研究者の共同作業となる。

（1）学校教育への離散数学導入に関する先行研究の検討

①わが国における離散数学導入に関する先行研究

諸外国の動向に応じてわが国でも，1990 年代から離散数学の導入に関する研究が行われるようになった。そこで，これまでのわが国の数学教育界での離散数学の扱いに関する研究状況を明らかにする。

②諸外国における離散数学の導入の実態

世界には離散数学を積極的に取り入れている国々がある。それらの国々の教育課程における離散数学の履修の仕方や教科書における離散数学の扱い方を明らかにする。例えば，アメリカやイギリスが離散数学を高等学校に導入している。

（2）高等学校数学科における離散数学の教育目的

数学教育の目的，すなわち，人間形成的目的，実用的目的，文化的目的という 3 つの目的と，高等学校における離散数学の関係を明らかにする。これらの関係が明らかにされることで，離散数学の高等学校への導入の前提が満たされる。

①離散数学の人間形成的目的

高等学校の数学科で離散数学を題材とすることで，生徒の思考力や態度の形成に貢献できることを示す。例えば，鳩の巣原理の学習で論理的思考力が育成され，離散グラフの学習で表現力の育成が期待できることを，それらの特質から明らかにする。

②離散数学の実用的目的

高等学校の数学科の離散数学が，高等学校の数学や他教科の学習，さらに進んだ数学の学習や研究，諸科学の研究，職業などにおいて使われていることを明らかにする。例えば，離散グラフに

おける考え方が，数学的モデル化や現実問題の数学的解決に使えることや，鳩の巣原理の考え方が，数学や現実世界の問題の解決に有用であることを示す。

③離散数学の文化的目的

離散数学が，文化としての数学の一部であること明らかにする。例えば，離散数学の本質や離散数学の歴史的発展を明らかにしたり，諸科学に応用されて来たりしていることを示す。

（3）高等学校数学における内容としての離散数学

①わが国の現在の小中高校における離散数学の扱い

離散数学は，現在の内容にも散見できる。そこで，わが国の現在の教育課程における小中高校を通した離散数学の内容を明らかにする。

②高等学校における離散数学の扱い

高等学校に離散数学を扱う場合の目標，内容，用語・記号などを明らかにする。

③高等学校における離散数学の教材化

高等学校や中学校における離散数学を扱った研究授業の計画，実施，検討を通して，離散数学の高等学校における教材化のあり方を明らかにする。そこでは，単元の扱い方，さらに，教科書の記述例のあり方を検討する。

（4）高等学校数学における離散数学の指導方法

①高等学校における数学の指導のあり方

高等学校における数学の指導のあり方，特に数学的活動を中心とした授業のあり方について検討する。

②離散数学を内容とした指導のあり方

高等学校や中学校における離散数学を扱った研究授業を通して，離散数学の指導のあり方を明らかにする。特に，グループ学習や，数学的活動などの面に注目する。

（5）高等学校数学における離散数学の評価方法

①高等学校の数学科における評価のあり方

高等学校の数学科における評価，特にわが国で最近実施されている観点別評価を検討する。さらに，数学的活動を中心とした授業における評価のあり方を検討する。

②離散数学を内容とした評価のあり方

高等学校や中学校における離散数学を扱った研究授業を通して，離散数学の指導や評価のあり方を明らかにする。

（6）離散数学の学習可能性：生徒の面からの離散数学の検討

離散数学を高等学校数学科の内容として導入した場合の学習可能性を確かめるために，高等学校や中学校において離散数学の内容に関する研究授業（長崎ほか，2004）を行い，授業中・授業後の生徒の反応を検討する。

①授業中の生徒の活動

離散数学を扱った研究授業中に，生徒はいかに考え，生徒同士や生徒と教師がどのようなやり取りを行うかを明らかにする。

②授業を通した生徒の成果

離散数学を扱った研究授業後に，生徒の感想文やワークシート，ノートなど分析して，生徒が離散数学をどの程度理解し，離散数学の学習を通して何を身に付け，離散数学や数学に対してどのような意識を持っているかを明らかにする。

（7）離散数学の導入についての諸階層の人々の意見

離散数学の数学的系統性や教育的可能性について明らかにするために，数学者や数学教育関係者の考えを明らかにする。

①数学者の意見

離散数学の数学的系統性の立場から，高等学校への離散数学の導入についての判断を明らかにする。

②数学教育関係者の意見

離散数学の教育的可能性の立場から，高等学校への離散数学の導入についての判断を明らかにする。

6．おわりに

私たちは，これまで，高等学校数学科の新たな教材として離散数学を考え始めた理由などを述べてきた。ただし，研究するに当たって，初めから「離散数学ありき」，ではなく，離散数学を導入することに対して数学者はどのような意見を持っているのか，離散数学を導入するとすればどのような趣旨で導入するのがよいか，その趣旨を生かすためにはどのような内容にすべきか，実際にその内容で教材は作成できるのか，その内容で授業をするときどのような点に配慮すべきかなどを丁寧に検討していくことが必要不可欠であると考えている。この検討の中で，どうしても乗り越えられない問題が出てくれば，どのように魅力的な内容でも，高等学校数学科に導入するのは無理だからである。そのため，検討は誠実さ，粘り強さ，及び細心の注意が必要である。また，現在のわが国の高等学校の数学科の授業は大学入試の影響を強く受けており，問題の解法の説明と問題練習が中心の授業になりがちだと言われている。可能であれば，そのような授業を変えることも視野に入れた研究にすべきである。

参考文献

秋山仁(2005)「「離散数学」デジタル化社会が求める新しい数学」『ILLUME』東京電力. Vol.17,No.2. pp.4-23.

扇谷尚・元木健・水越敏行（1981）『現代教育課程論－カリキュラム入門－』有斐閣双書.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2004）『平成14年度　高等学校教育課程実施状況調査報告書　数学　数学Ⅰ』実教出版.

島田茂（1970）「教材研究の新しい視点－数学科を主として－」『中等教育資料』No.259. pp.10-15.

長尾篤志（2004）「高等学校学習指導要領の変遷」『中等教育資料』No.815. pp.46-47.

長崎栄三・滝井章編著（2007）『なんのための算数教育か』東洋館出版社.

長崎栄三・長尾篤志・吉田明史・一楽重雄・渡邊公夫・国宗進編著（2004）『授業研究に学ぶ　高校新数学科の在り方』明治図書.

ハウスン・カイテル・キルパトリック（島田茂他監訳）（1987）『算数・数学科のカリキュラム開発』共立出版株式会社.

日本数学教育学会教育課程委員会（2006）「新しい時代の算数・数学教育を目指して」『日本数学教育学会誌』Vol.88,No.9. pp.39-40.

（本稿は，中間報告書の「高校数学への離散数学の導入に関する基本的な考え方」を加除修正したものである。）

高等学校へ導入する離散数学の有効性について

景山　三平
広島大学大学院教育学研究科

【要約】数学は，科学を記述する言葉，論理を通して理解する学問，思考文化の構造，などと捉えることができ，暗記する学問でも計算でもない。その数学教育の目的を，数学の有用性，文化・教養性，陶冶性の面から記述しまた認識することができる。しかしながら現在，無限と連続で象徴される微分積分を頂点とした伝統的な高等学校数学カリキュラムの中で，数学離れ等が起こっている。本稿では，その現状を打破し高校生に健全な数理感覚を醸成するために，高等学校数学教育に新しい分野の離散数学を導入することを提案し，その意義，必要性，特徴，育成できる特性，有用性，内容等を論じる。

1．導入の必要性

教育現場では生徒の多様性とカリキュラムの多様性がミスマッチを起こし，「数学嫌い，数学離れ」の現象が起きている。多くの高校生は高々「数学 II/数学 B」までしか学ばない。実際，「数学 III/数学 C」まで学ぶ高校生は高々 20 %程度であり，さらに数学を修得しなくてもよいとした学科が６%程度もある（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004)。このような中でも，高校生に対して種々の数学を示すことで数学の広さやその多様性を知らせることは重要なことである。また，数学は学習するという行為なしには学習意欲もわかないし，学習する時間が少なくなれば学力は一般には低下する。これまた自然なことである。

そこで，新たに離散数学に関する教材を何らかの形で系統的に導入し，その内容の学習を通して，このような現象をくい止めるための歯止め対策としたい。この試みは 21 世紀型学力の育成に数学から迫るものである。ここで述べる離散数学とは，有限で離散的な構造を扱う数学で，基本的には，重い計算をするよりは，言葉で考え論証する数学であり，豊かな発想と論理的な思考力が特に求められるものである。

今日まで種々の教科書で，パズルのような問題が紹介され，高校生が今まで知らなかった内容による目新たらしさ，その問題自体への取りかかりのよさ，新鮮さや面白さが強調されているが，それらは離散数学の一端で小さい入り口を示しているにすぎない。高等学校の数学教育活動において，その一つの新しい扉を開いて中に踏み込み，道の両側に咲く草花，木々又は湖などを楽しむことのできる世界を紹介する必要がある。その中で，今まで知らなかった新しい数学の世界を生徒達に感得させ，楽しむ心をもって高校数学を勉強することのできるエネルギーを与えることが求められている。

2．離散数学の特徴

体系的な知識や技能の積み重ねを必要とする伝統的な連続数学を中心としたカリキュラムの中に，多様な内容の離散数学（全体的には体系的ではなく，その都度考え工夫する内容が多い）を加味することを考え，情報を図（グラフ）等で表現・思考することの良さを感得させる必要がある。同時に，この分野は数理構造を視覚化しやすい面をもっていることにも注目すべきである。本来離散数学の

特徴は，ある対象のものを数え上げる行為でもある。これは，一定の条件下である性質を満たす場合の数を求めることにつながる。一般には，有限で離散的な対象を扱う分野としての問題は，大別して，存在問題(構成問題)，数え上げ問題，特徴づけ問題，最適化問題，を挙げることができる。これらに共通する一般的な特徴を次に示す。

（1） 問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できる。

（2） 能力(アイデア)に応じて多様な解法が考えられる(着想の転換)。

（3） 身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすい。

（4） アルゴリズムの開発が中心的な課題の一つである。

これらの特徴が生かせる離散数学に関する内容の教材化が重要となる。

また，離散数学が応用されている領域等については，例えば，本冊子第 II 章の秋山仁・酒井利訓の原稿を参照されたい。

3．命題からみた離散数学の一つの位置づけ

高等学校における数学の内容を命題からみると，存在命題の一部の場合が欠落している。命題とは， 真，偽を判定することが可能な文章や式を指す。今，「p(x)，x ∈ U」を命題関数とすると，命題は二つに大別できる。

（A）全称命題：「p(x) ∀x ∈ U」（すべての x に対して）

ここで，例えば，U を自然数の集合とおくと，これは数学的帰納法(棋倒し，ドミノ倒し)での論証に対応する。この内容は「数学B」で扱われている。高校数学では，多くの場合この全称命題を扱っている。

（B）存在命題：「p(x) ∃x ∈ U」 （ある x に対して）

ここで，集合Uについて更に二つの場合が考えられる。それは，（1）Uの濃度が無限，（2）Uの濃度が有限，の場合である。まず，（1）の場合は，高等学校ではよく扱われる。例えば，整式の除法における商と剰余の存在定理（「数学Ⅱ」），中間値の定理，平均値の定理(「数学 III」)，ロルの定理，等に対応する。次に，（2）の場合に対応した問題の解決に有用なものの中に，『鳩の巣原理』（デイリクレの原理，引き出し論法，部屋割り論法）と呼ばれるものがある。これは，一般には「自然数 n，k に対して，nk+1 個の対象を n 個のクラスに分類すると，少なくとも１つのクラスは k+1 個以上の対象を含む。」，または「p+q−1 羽の鳩が２つの巣を共有しているとする。すると，少なくとも１つの巣には p 羽の鳩がいるか，もう１つの巣には q 羽の鳩がいる。」と表現されているものであり，ごく自然な原理である。高等学校の現行教科書を調べてみると，「数学A」数研出版 (2003) の「第１章 場合の数と確率」(p. 16) に鳩の巣原理の紹介がある。特に，離散的な数理現象に対して（1）の中間値の定理の考え方を（2）の場合に応用したことに注目したい。例えば，本来（2）のカテゴリーに属する離散現象の等分問題に関するパンケーキ定理等がそれに相当する。高等学校数学において，この場合（2）の存在命題をもっと扱ってもよいのではないかと考える。それは，生活や社会の中で数学が役立っていることを感得できる存在命題について思考する経験をもつことは，数学の有用性やネットワークなど他分野への応用の可能性等を理解する上で大切であると判断しているからである。

4．育成できる特性

離散数学に関する内容の教材化を視野に入れるなど，既存の教材以外をも用いて，数学の世界の

広さを生徒達に伝えていくことは，算数・数学嫌いの多い中，極めて大切である。それによって思考の楽しさを共有でき，生徒の主体的な学習活動の活性化につなげることができる。このことは，高等学校までの数学や大学での線形代数学とか解析学などは，多くの場合，自分の頭の中で内容が鮮明でなくとも，公式を覚え，それにあてはめ，またそれをうまく使うテクニックを身につけていれば，問題は解ける，というように感じているのではと考えるが，離散数学の問題を解く際には，何となくでは解けない場合が多いことにも表れている。

そこで，教材化の意義を明らかにするためにも，離散数学に関連した教材で次に述べるポイントを育成できることを主張したい。これらのことが離散数学を高等学校の数学教育の中に導入する理念の明確化につながる。そのポイントとは，

（1）考える意欲の喚起と，数学的な見方や考え方
（2）柔軟な思考力(鋭い着眼点，思考の自由性，多面的にものを見る力)
（3）問題に潜んでいる数理構造を見つけ出す能力
（4）アルゴリズム的問題解決能力
（5）数学を活用する能力や態度(思考の楽しさ)
（6）学習意欲の喚起と，(連続)数学に対する積極的な学習態度
（7）言葉での説明が多いことに起因する論理的表現力
（8）人間本来の知的好奇心や美への探求心

等を挙げることができる。無論，これらは従来の連続数学をフィルターとしても育成できるはずであるが，現状では多くの高校生にとって困難な状況にある。

4.1. 手段

上記のポイントを育成するための離散数学に関する教材を導入する実際的な教育場面を考えると，「数学基礎」，場合の数と確率，集合と論理，順列・組合せ(「数学A」)，数列(漸化式を立てる)(「数学B」)，行列，数値計算とコンピュータ，「総合的な学習の時間」，「学校設定科目」，の中で教育活動展開が可能となろう。最低でも，単元「個数の処理」(旧数学I)の復活は考えたい。

4.2. 方法

離散数学に関する新たな単元の創設としては，先ずは，高等学校文科系生徒，職業科生徒等を対象としたものでも良い。「数学III，数学C」まで学ぶ生徒の割合はそれほど大きくなく，その内容以前までで数学の学習を終えている多くの生徒に，数学的思考の多様性を示すことで，健全な数学観を醸成する必要がある。その『導入方法』としては，次の2通りが考えられる。

（1） 1つの科目・単元等として独立に設定する場合
（2） 通常の授業の中でトピック的に設定する場合

それぞれの設定には特徴があるが，前者は，系統的な内容で授業を構成することができる点で望ましい。このスタイルでは，それなりに授業時間が確保でき，そして離散構造の森に一部入り込むことができ，前述した育成すべき資質の獲得の確認作業がしやすくなる。即ち，学校数学的視点での体系化の必要性からくる問題である。一方，後者の位置づけでは，スポット的な授業時間の確保での展開になるので，生徒に一般には離散的な数理思考のよさの意義が有意に伝わり難く，その場面だけでの楽しさを感じることだけに終わりがちである。よほど授業の展開を工夫しない限り，真に身に付くものがないという恐れがある。このように授業の構成には十分な配慮が必要となる。

５．指導上の留意点

離散数学の内容を授業の中で展開する場合には，教師も思考を楽しんでいる姿勢を見せながら，次の３つの点には特に細心な注意が必要となる。

（１） 多様で十分な思考活動時間の確保

（２） アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化

（３） 基本的にはグループ学習形態での実施（一斉授業では行わない）

これらの活動を保証せずして，離散数学の教材を通して，数学嫌い，数学離れをくい止める役割を演じることは出来ない。特に，（１），（３）については，研究授業を通してもその重要性は確認されている。

さらに具体的な指導方法は，本冊子の第Ⅴ章でまとめられるいくつかの研究授業実践に対する多角的な検討を通して提示されるものと考える。

６．問題点

離散数学全体の学問としての体系化はなされていないが，考察手法として体系化されつつある。それを確率的手法，線形代数的手法などにみることができる。では，どのような分野があるのだろうか。それらは，組合せ論，グラフ理論，ラムゼー理論，極値集合論，デザイン理論，符号理論，離散幾何学，最適化理論，マトロイド理論等である。実に多岐にわたっている。このことが離散数学に関する教材の作成に際して話題の宝庫となりうることを示している。と同時に，有機的に考えないと種々の分野からのつまみ食い的な内容で構成する危険性をはらんでいる。

1736 年，L. オイラーはケーニヒベルグの橋の問題と呼ばれる問題をグラフ理論的考察で解決した。オイラーの一筆描き定理である。教材化しやすい話題である。また，1996 年までの日本のグラフ理論とその周辺の離散数学の歩みについての調査を秋山仁（1996）に見ることができる。

現在，分野毎には体系化されつつあるので，高等学校数学レベルでは教材化作業に問題はないが，教師の数学観が影響する可能性がある。即ち，伝統的連続数学信奉者である。このことは，離散数学の内容の話題についての選択の幅及び適切に選択すべき内容に影響する。これらは，現場教師が離散数学を落ち着いて学んだ経験を有していないことに起因すると考えている。

７．離散数学の基礎

その都度，忍耐強く考える力があれば，基礎的なものとして特に挙げる必要を感じないが，伝統的なこととして下記の事項についての理解ができていると，いろいろな問題等を把握し思考する時間を節約できるという意味で有用であろう：

(1) 集合と集合演算，(2) 集合の分割とスターリング数，(3) 場合の数，(4) 和と積の法則，(5) 順列と組合せ，(6) 数学的確率（古典的確率），(7) 数の分割（分割数）とヤング図形（またはフェラーズ図形），(8) 数学的帰納法，(9) 包除原理，(10) 鳩の巣原理，(11) 二項定理と多項定理，(12) 命題と論理演算，(13) 関係と関数，(14) フィボナッチ数，(15) 線形不定方程式，(16) 母関数，(17) 漸化式関係。

８．離散数学内容の提案

高等学校において，３年間に亙る離散数学のカリキュラムは不必要で，連続数学の中に如何に居場所を見つけるかが鍵となる。高々１年間のカリキュラムで十分であろう。しかしながら，第６節

で述べたように多岐にわたる分野が存在する上，指導時間数にも関係するので，どのような（到達）目標に対してどんな内容を導入することが適切であるかを検討する必要がある。

離散数学の問題には，大きく分けると２つの場合がある。それは，その問題の解が一般的に式表現できる場合（解の公式の存在等）と，式表現できない場合である。前者は，学校教育の場面に導入しやすいが，後者は，導入が難しい。それは，解を探すのに時間を要する場合が多いからである。しかしながら，そこには思考の楽しさを見出すことができる。

高等学校数学教育の中に導入する離散数学の内容については，以下の骨子（１），（２），（３），（４）で構成することを提案する。

（１）原理について

１）数え上げの基本原理

ある事象がn1通り起り，引き続いて第２番目の事象がn2通り，さらに引き続いて第３番目の事象がn3通り起る，・・・。このとき，

和の法則（各事象のどれかが起る場合の数は，n1＋n2＋n3＋…通りである。）

積の法則（各事象が示された順序ですべて起る場合の数は，n1n2n3…通りである。）

２）包除原理（包含と排除の原理，包含と排除の法則，和積定理とも呼ばれる；ある集合の要素数を数えるために，その集合に含まれてはならないものを除外し，不当に複数回除外されたものを補正する方法。簡単な一例をあげると，二つの集合ＡとＢに対して，その和集合の要素の数は，Ａの要素数とＢの要素数を合わせたものから，ＡとＢに同時に入っている要素の数を引いたものである（「数学Ａ」の単元（２）集合と論理，にある），となる。本原稿末「資料」IIも参照）

３）鳩の巣原理（第３節，及び本原稿末「資料」Ｉを参照）

（２）数え上げ

１）順列と組合せ（「数学Ａ」の単元（３）場合の数と確率，の内容）

２）二項係数と二項定理（「数学Ａ」の単元（３）場合の数と確率，の内容）

３）線形不定方程式の解の個数（ディオファントス方程式；複数個の変数に関する一次方程式の整数解の個数を求める。例えば，方程式x+y+z=5の正の（又は非負の）整数解の個数は６（又は21）である。）

４）分割数（いくつかの自然数の和に分割する方法の総数；例えば，５の分割数は，その分割が，5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,であるので，７となる。）ここでは，順番は無視する。上の例で言えば，例えば，3+1+1と1+1+3は同じと見なす。

５）再帰的関係（数列のｎ番目の要素とそれより前のいくつかの要素との関係；これらの関係を表す式を漸化式または差分方程式ともいう。プログラミングでは，自分自身を呼び出すアルゴリズムを再帰的アルゴリズムという。フィボナッチ数列，ハノイの塔の問題はその典型例。「数学Ｂ」単元（１）数列，の内容もある。）

（３）グラフ理論

次の２種類の内容で構成する。

１）課題をグラフ理論的に捉えることにより有効に解決できる題材：

一筆書き問題（ケーニッヒベルグの橋問題―オイラー路，ハミルトン閉路）など，問題を点と線でグラフ構造化し捉え直すことにより解決する課題を扱う。

２）グラフ理論の諸基本概念（平面グラフ，完全グラフ，１因子分解，木，２部グラフ，交グラフ，

マッチング ーホールの結婚定理―，グラフの隣接行列，など）：

基本的には，その概念を用いた議論結果が応用（アルゴリズム，交通問題，ネットワーク，ゲームなど）を有するものに限る。また，数学的不変量を感じる意味で，オイラーの定理（ある平面グラフにおける面の数，頂点の数，辺の数に関する関係式）も興味深い。２部グラフやマッチングなどは関数や関係の項目に追加しても学習できる。

（４）離散数理を楽しむ

思考そのものを楽しみ味わうために，応用場面等をもつ種々の問題について考える。例えば，可視性問題（美術館問題；n 角形の形をした美術館がある。何台かの監視カメラを館内に設置し壁に展示してある絵画を監視したい。カメラは高々何台必要か。），巡回セールスマン問題（セールスマンが全ての顧客を回り元に戻る最短経路の発見；離散アルゴリズムでの近似解法；効率よく解くことが困難），パンケーキ定理（平面上に任意に与えられた n 個の赤点と m 個の青点に対して，これを同時に２等分する直線が存在する。），ハピー・エンド問題（どの３点も同一直線上にない任意の５点に対して，ある適当な４点を選びその４点で凸四角形ができる。），カークマンの女学生散歩問題（分解可能釣合い型不完備ブロックデザインの構成問題と同値），畳敷き問題（パリティ，２値化；問題の構造を視点を変えて捉え，偶数，奇数の特性を用いて解決する。），パスカルの三角形の性質（パスカルの三角形中の両端を除く各数は，その数の斜め左上と右上の数の和，三角形は左右対称，n+1 段目の n+1 個の数の総和は 2n，等），ハノイの塔問題（漸化式；３本の棒を使っていくつかの円盤を移動させる問題），配線問題（平面上に赤点，青点がそれぞれ 10 個ずつ任意に配置されている。ただし，どの３点も同一直線上にはないとする。このとき，赤点，青点を両端点とするような 10 本の線分が引けて，かつ，そのどの２本も交差しないような結び方が存在する。），など。

９．具体的な離散教材の構築に向けて

前節までの内容確認と精査を行うために，具体的な離散数学に関する教材開発にヒントを与える問題集を，まずもって作成することが大切となる。これら各種テーマに応じた例題の作成は，この種の新しい活動に多くの理解者を得る上で有益である。これらの作業が教材化のための第一歩になろう（参考文献 I を参照）。この中で，ロシアの中学生，高校生向けの数学問題集「数学のひろば I, II」（志賀浩二・田中紀子訳，1998）には特に有益な情報が含まれている。とにかく前節で提案したような内容が決まれば，例えば，その分野の著書（参考文献 II を参照）などにはいくつかの例題をみることができ，高校数学教育レベルを考えた上での教材化作業が可能となろう。離散数学の話題に関する問題づくりのアイデアやその作成手順等を，根上生也・中本敦浩（2004）に見ることもできる。

本原稿末に「資料」として，特に鳩の巣原理に関する 40 問題や包除原理に関する４問題，その他６問題，を挙げている。本節では，大学入試問題として出題された離散数学の内容に関する９問題のみ列挙する（他の入試問題は，景山，2005，を参照せよ）。初等整数論に関係した問題が結構多く見られるが，それらは原則として離散数学としては扱わない。それらとは，例えば，単なる各種の整数問題や，整数方程式，不定方程式，単位分数の和，素因数分解，n 進数，格子点の個数，ユークリッドの互除法などに関する問題である。他に，パスカルの三角形，ピタゴラス数，順列・組合せ，２項定理の応用，２項分布確率，集合と論理（命題の真偽問題）などに関する問題も見られる。数学的確率（古典的確率）の問題は実に多いがここでは記載しない。

明治大学経営学部では，一時頻繁にグラフの問題が大学入学試験で出題されていた。また，最近

の傾向の一つに，横浜国立大学教育人間科学部マルチメディア文化課程の前期総合問題の問題１には，2001 年度から毎年，離散数学の問題が出題され続けている。

１．東北地方の地図の概形は右図（省略）のとおりである。６つの県を色で塗り分ける。ただし，隣り合う県は異なる色で塗り分ける。このとき，次の（１），（２）に答えよ。

（１）３色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

（２）４色を用いるとき，何通りの塗り方があるか。

２．「n-1 個以下の引き出しに n 個の物をしまえば，どこかの引き出しには２個以上の物が入らなくてはならない（１）。」このごく当然の道理は，デイリクレの原理といって数学ではよく利用される。

さて，この原理をつかって，「どのような会合においても，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる」ことを証明しよう。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人とはいわない。

会合に集まった n 人のおのおのに，その友人数を対応させる。友人数は最小 0 から最大 n-1 までにわたりうるが，0 と n-1 とが同時に現れることはない（２）。したがって，友人の数は n-1 を越えない。そこで，デイリクレの原理により，同じ友人数をもつ人が２人はいることになる（３）。

（１）なぜか，理由をわかりやすく述べよ。

（２）なぜか，理由を述べよ。

（３）デイリクレの原理をどう適用したか。

３．平面上に，どの３点も同一直線上にない６個の点があり，すべての点の間が線分（辺）で結ばれている図がある。今，この図のすべての辺に赤か青のどちらか一方の色をつけるとする。このとき，この図の中には３辺が同じ色の三角形が存在することを説明せよ。

４．xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点を，格子点とよぶ。次の問いに答えよ。

（１）ただ１つの格子点しか通らない直線が存在することを説明せよ。

（２）１つの格子点も通らず，x 軸，y 軸のどちらとも平行でない直線が存在することを説明せよ。

（３）n を２以上の自然数とする。ちょうど n 個の格子点を通る直線が存在するかどうか，あなたの考えを書け。

５．平面上に任意に与えられた n 個の赤点と m 個の青点に対して，これを同時に２等分する直線が存在することを証明せよ。但し，n，m は有限の値である。

６．一辺の長さが 50cm の正方形の形をした射撃の的がある。いま，51 発の弾丸が的上のすべて異なった点に当たったとする。このとき，弾丸が当たった点のうちのある３点は，一直線上に並んでいるか，あるいはそれら３点を頂点とする三角形の面積が $50cm^2$ 以下となっていることを証明せよ。

７．円に内接する正８角形の８つの頂点から３つを選んで作れる３角形で，鋭角３角形の個数を求めよ。

８．赤，黄，緑，青，紫の小さな球がたくさんあり，次の条件（１），（２），（３）を満たしている。

（１）同じ色の球は，同じ重さである。

（２）球の重さは，100g，101g，102g，103g のいずれかである。

（３）赤い球 256 個，黄色い球 64 個，緑色の球 16 個，青い球４個，紫色の球１個の重さの合計は，ちょうど 35000g である。

各色の球１個の重さを求めよ。（注：問題には，球が並んだ図がある，これは省略する。）

９．1gから40gまでの，1gの整数倍の質量をもつ任意の物体を，天秤を使って1g単位で量りたい。このとき一方の皿に物体を，他方におもりをのせ，つり合わせて量る方法Ａと，物体をのせる皿にも，おもりをのせることを許す方法Ｂがある。方法Ａと方法Ｂで用意すべきおもりの個数の最小値をそれぞれ求めよ。

10. 授業実践例

１．広島市のある高等学校において，１年生を対象として，2001年９月に４回（それぞれ「鳩の巣原理」「ハピー・エンド問題」「パリティ（偶奇性）を利用する問題」「タイル張り問題」を中心に），12月に３回（「ハピー・エンド問題」を３クラスで），津賀章二による離散数学の話題を中心とした研究授業が実施された。各教材観のエッセンスは，順に，あいまいさに惑わされることなく，そのあいまいさを有効に使う能力，分類・整理する能力，パリティ（偶奇性）を理解しその特性を用いて問題解決する力，連鎖反応を読む能力等を身につけることをうたっている。また，そこでは，１）離散数学教材に関する問題を１問，「今日の問題」として設定し，生徒たちが自由に考え，発言できる場面を設定しながら教師側が必要に応じて支援を送る形態で行っている，また，２）それぞれの授業の内容は，その時間内（50分）で完結することを目標としている。興味深い考察が行われているが，この中の１回分（鳩の巣原理を取り上げたもの）の授業実践に出席して感じた事は，生徒がこの種の問題にはじめて出会ったことで興味を示したが，現代の高校生は少し考えて分からないとすぐに思考をストップする，all or nothing 的な状況に陥り易いということだった。忍耐強く思考を継続してはくれなかった。

２．2005年11月に，鳩の巣原理を中心とした５回にわたる研究授業実践を実施した。授業実施者は岡山県のある高等学校教諭津島久美である。筆者も２回目の授業を参観し，その分析に携わった。５回分の授業は，鳩の巣原理の発見（１回目），鳩の巣原理を用いた三つの問題演習（２回目），前時の最終問題についてのグループ討論（３回目），グループ発表会（４回目），鳩の巣原理の理解度を見るための問題の解決活動（５回目），の順で進めた。同時に各授業の前後にアンケート調査を実施し，１週間後と１ヶ月後にも情意面の変化に関するアンケート調査を実施した。これらの考察から，数学という学問の新しい面や微分積分を頂点とする伝統的な高等学校数学カリキュラムの中での離散教材の有用性を示せたと評価している。具体的に生徒の状況を述べると，この一連の授業では，思考の葛藤の中で生徒たちの笑顔が見られたこと，生徒たちが輝いていたこと，すごく楽しんでいたこと等が挙げられる。この実践授業の詳細な報告は，本冊子の第Ⅴ章に含まれている。本実践は，１．の広島市での研究授業とは異なり，５回とも同じ話題で進めたという点に特徴がある。

参考文献 I

離散数学内容の教材化等で参考になる文献を挙げる。

秋山　仁（1988）：有限離散の数学．三省堂高校数学ぶっくれっと，No. 9，pp. 1-17.

秋山　仁（1989）：数学の視覚的な解きかた．発見的教授法による数学シリーズ　講義４．駿台文庫.

秋山　仁（1996）：日本の離散数学の歩み．日本数学会応用数学分科会，特別講演.

秋山　仁（2005）：「離散数学」デジタル化社会が求める新しい数学．イリューム，第 34 号，pp. 4-23.

池本圭正（1999）：応用数学的アプローチを基盤とした数学カリキュラムの開発に関する研究 ー高等学校数学への離散数学的課題導入の試みー．高知県教育センター紀要，第 36 号，pp. 281-287.
景山三平（2005）：高等学校数学教育における離散数学の有用性ー鳩の巣原理を中心としてー．離散数学研究会，東京，25pp.
木村利幸（1995）：事象の変化の見方と離散数学 ー離散的な変化の見方を高等学校数学に位置づけるためにー．第 28 回数学教育論文発表会論文集，pp. 443-448.
熊沢和敏（1993）：高等学校における離散数学の教材化に関する一考察．第 26 回数学教育論文発表会論文集，pp. 327-332.
熊沢和敏（1994）：高等学校数学における離散数学の教材化の意義．数学教育研究，上越教育大学，第９号，pp. 85-94.
公庄康三（2004）：Discrete Math 離散数学．東京書籍.
河野芳文（1999）：グラフ理論 ー一筆書きとオイラーの定理ー．広島大学付属中・高等学校研究紀要，第 46 号，pp. 31-37.
国立教育政策研究所教育課程研究センター（2004）：平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査（高等学校）ペーパーテスト調査集計結果及び質問紙調査集計結果．国立教育政策研究所教育課程研究センター，pp. 132-133．なお，この報告書は，次のサイトで見ることができる。
http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/index.htm
小林伸行（1992）：離散数学の教材化の意義．第 25 回数学教育論文発表会論文集，pp. 457-462.
小林伸行（1993）：離散数学の教材化に関する研究．兵庫教育大学大学院学校教育研究科修士論文.
志賀浩二・田中紀子訳（1998）：数学のひろばⅠ，Ⅱ．岩波書店．(Mathematical Circles, by Dmitri Fomin, Sergey Genkin and Ilia Itenberg, American Mathematical Society, 1996).
杉山吉茂・澤田利夫・橋本吉彦・町田彰一郎編（1999）：数学科教育．第６章 離散数学(室岡和彦)．学文社
津賀章二（2002）：高等学校数学科の離散数学教材導入に関する試み．広島大学大学院教育学研究科修士論文.
中本敦浩（1998）：高校数学から見た離散数学の世界．数学セミナー，８月号，pp. 10-13.
根上生也（1997）：離散数学の発展 ー「個数の処理」を活かそう！ 三省堂高校数学情報 夏季特別号，pp. 5-8.
根上生也（1999）：離散数学で変わる数学教育．算数・数学カリキュラムの改革へ．日本数学教育学会編，産業図書，pp. 129-140.
根上生也・中本敦浩（2004）：基礎数学力トレーニング．日本評論社.
室岡和彦（1992）：離散数学教材の学習指導方法．筑波数学教育研究(11)A，pp. 11-18.
森村靖彦（2001）：組合せ論に関する基礎的研究 ー数えあげの手法と教材性を中心にしてー．広島大学大学院教育学研究科修士論文.
和木 勲・萩田竜三（1999）：グラフ理論を教える ー授業報告と理論的な背景ー．大阪高等学校数学教育会会誌 50 周年記念特集号，pp. 20-27.
J. A. Dossey (1990)：Discrete Mathematics and the Secondary Mathematics Curriculum. National Council of Teachers of Mathematics.
J. A. Dossey (1991)：Discrete Mathematics: The Math for Our Time. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12, pp. 1-9. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

M. J. Kenney and C. R. Hirsch (eds.) (1991): Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

S. B. Maurer (1984): Two meanings of algorithmic mathematics, Mathematics Teacher, No. 77, pp. 430-435.

S. B. Maurer and A. Ralston (1991): Algorithm: You cannot do discrete mathematics without them. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12, pp. 195-206. Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics.

S. B. Maurer and A. Ralston (1998): Discrete Algorithmic Mathematics, 2nd ed., A. K. Peters, Ltd.

National Council of Teachers of Mathematics (1989): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000): Principles and Standards for School Mathematics, Reston VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

J. G. Rosenstein, D. S. Franzblau and F. S. Roberts (eds.) (1997): Discrete Mathematics in the Schools. American Mathematical Society, National Council of Teachers of Mathematics.

The University of Chicago School Mathematics Project (1998): Precalculus and Discrete Mathematics, Scott Foresman Addison Wesley. http://social-sciences.uchicago.edu/ucsmp/

離散文献 II

幾多の専門書で，教師の皆さんが参考になると思われる基本的文献を挙げる。

(組合せ論一般)

N. Biggs (1989): Discrete Mathematics. Revised ed., Clarendon Press, Oxford.

P. Cameron (1994): Combinatorics; Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge University Press, Cambridge.

N. Crisler, P. Fisher and G. Froelich (1999): Discrete Mathematics Through Applications, 2nd ed., W. H. Freeman.

M. Jr. Hall (1967): Combinatorial Theory. Ginn-Blaisdell. (岩堀信子訳「組合せ理論」吉岡書店, 1971).

J. H. van Lint and R. M. Wilson (1992): A Course in Combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge.

P. フランクル・秋山 仁 (1987): 現代組合せ論. 共立出版.

C. ベルジェ (野崎昭弘訳) (1973): 組合せ論の基礎. サイエンス社.

F. P. プレパラータ・M. I. シェーモス (浅野孝夫・浅野哲夫訳) (1992): 計算幾何学入門. 総研出版.

S. スキエナ (植野義明訳) (1992): Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論. アジソン ウエスレイ・トッパン.

R. P. スタンレー (成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳) (1990): 数え上げ組合せ論 I (Enumerative Combinatorics, Volume I), 日本評論社.

J. マトウシェク/J. ネシェトリル (根上生他・中本敦浩訳) (2002): 離散数学への招待 上. シュプリンガー・フェアラーク東京.

J. マトウシェク/J. ネシェトリル（根上生他・中本敦浩訳）(2002)：離散数学への招待 下．シュプリンガー・フェアラーク東京．
C. L. リュー（伊理正夫・伊理由美訳）(1975)：組合せ数学入門 I, II．共立全書．
L. ロバッシュ（成嶋弘・土屋守正訳）(1993)：数え上げの手法．東海大学出版会．
L. Fejes Toth (1983)：配置の問題（樋口伊佐夫・種村正美訳）．みすず書房．
秋山 仁 (1990)：数学流生き方の再発見．中央公論社．
秋山 仁・占部正承 (1998)：初等離散数学．森北出版．
秋山 仁・R. L. Graham (1993)：離散数学入門．朝倉書店．
榎本彦衛 (1982)：情報数学入門．新曜社．
成嶋 弘 (2003)：数え上げ組合せ論入門．改訂版．日本評論社．
野崎昭弘 (1994)：組合せ論・グラフ理論．日本評論社．
野崎昭弘・田中公治 (1979)：情報数学入門．サイエンス．
平松豊一 (1997)：応用代数学．裳華房．
道脇義正 他(1991)：情報科学のための数学入門．東京図書．
山本幸一 (1983)：順列・組合せと確率．岩波書店．

（グラフ理論）

C. ベルジュ（伊理正夫・他訳）(1976)：グラフの理論 I, II, III．サイエンス社．
B. ボロバシュ（斎藤伸自・西関隆夫訳）(1990)：グラフ理論入門．培風館．
R. デイーステル（根上生他・太田克弘訳）(1996)：グラフ理論．シュプリンガー・フェアラーク東京．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：グラフの構造．東海大学出版会．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：グラフの不変数．東海大学出版会．
L. ロバッシュ（秋山仁・榎本彦衛監訳）(1993)：集合論的グラフ理論．東海大学出版会．
C. L. リュー（成嶋弘・秋山仁訳）(1978)：組合せ構造とグラフ理論入門．マグロウヒル．

（コンピュータサイエンス）

R. グレアム/D. クヌース /O. パタシュニク（有澤誠・安村通晃・荻野達也・石畑清訳）(1993)：コンピュータの数学（Concrete Mathematics, 1989）．共立出版．
N. コブリッツ（林琳訳）(1999)：暗号の代数理論，シュプリンガー・フェアラーク東京．
D. R. スチンソン（桜井幸一訳）(1995)：暗号理論の基礎．共立出版．
S. リプシュッツ（成嶋弘監訳）(1995)：離散数学．オーム社．
C. L. リュー（成嶋弘・秋山仁訳）(1986)：離散数学入門．マグロウヒル． オーム社(1995)．
赤間世紀 (1996)：離散数学概論 —コンピュータサイエンスのための基礎数学—．コロナ社．
茨木俊秀 (2004)：情報学のための離散数学．昭晃堂．
尾関和彦 (2004)：情報技術のための離散系数学入門．共立出版．
柴田正憲・浅田由良 (1995)：情報科学のための離散数学．コロナ社．
仙波一郎 (1989)：組合せアルゴリズム．サイエンス社．
野崎昭弘 (1980)：離散系の数学．近代科学社．
藤原良・神保雅一 (1993)：符号と暗号の数理．共立出版．
守屋悦朗 (1992)：コンピュータサイエンスのための離散数学．サイエンス社．

（デザイン）
D. Raghavarao (1988): Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments. Dover.
石井吾郎 (1972): 実験計画法/配置の理論. 培風館.
来安善一 (1980): アダマール行列とその応用. 電子通信学会.

【資料】

I. 鳩の巣原理に限定して，その考え方を用いて解ける問題を提示する。

以下の 40 問題は，「次を証明せよ」である。

1. n 羽の鳩が k<n なる k 個の巣に入るとすれば，2羽以上の鳩が入る巣は少なくとも1つある。
2. n 羽の鳩が k<n なる k 個の巣に入るとすれば，【n/k】羽以上の鳩が入る巣は少なくとも1つある。ここで，【x】は x 以上の最小整数を示し，切り上げ（上方整数部分）と言われる。
3. 3人以上のグループには，必ず同性の2人がいる。
4. 5人の若い工員が全員で 1500 ドルの賃金を手にした。全員各自1台 320 ドルの電子製品を買いたいと思っている。少なくとも1人は，次の賃金支払日まで買うのを待たなければならない。
5. 袋に赤と黒の2色のビーズがいくつか入っている。袋の中を見ないでビーズを取り出して，同じ色のビーズが2個手元にあるようにするには，最低いくつのビーズを取り出せばよいか。
6. 広島市には，必ず同じ髪の毛の本数をもつ人が，すくなとも8名はいる。ただし，広島市の人口を 120 万人とし，人間の髪の毛の本数は高々16 万本とする。
7. ある森に 80 万本の松の木が生えている。60 万本を越える松葉をもつ木は1本もないとすると，この森には，同じ数の松葉をもつ木が少なくとも2本存在する。
8. 25 個のリンゴ箱をもつ店に3種類のリンゴが配達された。さらに，それぞれの箱には同じ種類のリンゴが入っているとすると，少なくとも9箱には同じ種類のリンゴが入っている。
9. n 個のボールが m 個の箱に入っている，もし $n < m(m-1)/2$ ならば，同じ数のボールが入った箱が少なくとも2つある。
10. ある国には，サッカーチームが s 組あって，それぞれ 11 名の選手がいる。今，他国で行われる試合に参加するために，選手達は空港に集合している。しかし，彼らはキャンセル待ちの状態である。目的地に飛ぶ航空機は 10 便あるが，現在どの便にも s 人分の空席しかない。1人の選手がキャンセル待ちを避け自家用機で行くことになった。このとき，少なくとも1つのチームは，選手全員で試合に行ける。
11. 1辺の長さ2の正方形の中に5点があるとき，その中に距離が高々 $\sqrt{2}$ である2点が存在する。
12. 1辺の長さ2の正方形の中に9点があるとき，その中に三角形の面積が高々 1/2 である3頂点が存在する。
13. 1辺の長さが 70cm の正方形の形をした射撃の的があり，50 発の弾丸が的に当たったとする。このとき，弾丸が当たったある2点が存在して，それら2点間の距離は 15cm 未満である。ただし，弾丸の当たった所は点と見なし，2個の弾丸が同一の場所に当たった場合は，それらの2点の距離は 0 とする。
14. 1辺の長さが 70cm の正方形の形をした射撃の的があり，99 発の弾丸が的に当たったとする。このとき，弾丸が当たったある3点が存在して，それら3点を頂点とする三角形の面積は $50cm^2$ 以

下である。ただし，弾丸の当たった所は点と見なし，２個の弾丸が同一の場所に当たった場合は，それらの２点の距離は０とする。

15. １辺の長さ１の正六角形のダーツ盤に 19 本の矢が刺さっているとき，その中に距離が高々 $\sqrt{3}/3$ である２点が存在する。

16. １辺の長さ 60 の正方形の広場がある。この広場に 10 本の照明灯を立てるとき，どんな立て方をしても，少なくとも２本はその間隔が 30 以下になる。

17. １m 四方の正方形の中に 51 個の点が点在している。この中のある３点をカバーできる 20cm 四方の正方形が存在する。

18. １辺の長さ２の正三角形の中に５点があるとき，その中に距離が高々１である２点が存在する。

19. １辺の長さ３の正三角形の中に 10 点があるとき，その中に距離が高々１である２点が存在する。

20. 平面の格子点上に，５つの点があるとき，これらの格子点の中の適当な２つを取ると，この２点の中点もまた格子点となる。

21. ３次元ユークリッド空間内に９つの格子点が与えられているとき，これらの格子点の中の適当な２つを取ると，この２点の中点もまた格子点となる。

22. 1, 2, 3, ..., 2n の 2n 個の自然数の中から n+1 個を選ぶとき，その n+1 個の自然数の中に差が１である２つの数が必ず含まれる。

23. 1, 2, 3, ..., 4n の 4n 個の自然数の中から 2n+1 個を選ぶとき，その 2n+1 個の自然数の中に差が２である２つの数が必ず含まれる。

24. n 個の任意の自然数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，その中の何項かの和（１項以上の和）は，n で割り切れる。

25. 次の式をみたす整数 a, b, c で，どれか１つは０でなく，かつどの絶対値も 100 万を越えないものが存在する：　$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

26. ２のべき乗の中で，その差が 2005 の倍数となる２つの数がある。

27. 10 進法で表したとき，全ての桁に表れる数が１だけという整数で，2003 で割り切れるものがある。

28. 10 進法で表したとき，最後が 001 で終わる３のべき乗で表される数がある。

29. ６人からなるどんな集団にも，互いに知り合いである（少なくとも）３人か，互いに知り合いでない（少なくとも）３人の，どちらか一方はいる。

30. ６点完全グラフを考える。すべての辺が赤か青のいずれかに塗らされているものとする。このグラフには，単色三角形（すべての辺が同じ色）が存在する。

31. どんな５人のグループでも，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人といわない。

32. どのような会合においても，その中に友人の数が同じであるような人が少なくとも２人はいる。ただし，友人関係は相互的であって，自分自身は友人といわない。

33. １以上 99 以下の自然数の中から勝手に 10 個選んだ数からなる集合 S が一つ与えられている。このとき，要素全部の和が等しい，空でない互いに排反である S の部分集合 X, Y が存在する。ただし，集合 X, Y が互いに排反であるとは，共通に含まれる要素がないことをいう。

34. 数学オリンピックで 10 人の生徒が全部で 35 題の問題を解いた。どの問題もちょうど１人の生徒だけに解かれている。また，１つの問題だけを解いた生徒，２つの問題を解いた生徒，３つの問題を解いた生徒が少なくとも１人はいる。このとき，５つの問題を解いた生徒が少なくとも１

人はいる。

35. 3x3 の格子があり，それぞれのマス目に -1, 0, +1 のどれかが入っている。タテ，ヨコ，ナナメと和をとる取り方は８通りあるが，そのうち，２通りは和が等しくなる。

36. 100 人が丸いテーブルで囲んで座っているが，半分を超える人が女性である。テーブルの対角線上に座っている２人の女性がいる。

37. 15 人の少年がどんぐりを 100 個集めた。このとき，同じ数のどんぐりを集めた少年がいる。

38. 1, 2, . . . , 9 を３つのグループに分ける。そのうちの１つのグループの中のすべて数の積は 71 を超える。

39. 半径の長さが１の円がある。この円周上に異なる７つの点 p_1, p_2, . . . , p_7 を任意に取る。このとき，弦 p_ip_j ($1 \leq i, j \leq 7; i \neq j$) の長さが１より小さい点の組 p_i, p_j が少なくとも一対存在する。

40. 円周上に１から 10 までの数をランダムに並べる。このとき，円周上で隣り合う３つの数で和が 17 以上になるものが存在する。

II. 包除原理の考え方を用いて解ける問題を提示する。

41. 文字 A, B, C, D, E, F の順列の中で，文字列 BE も FAD も含まないものの個数を求めよ。

42. 1 から 9999 までの 9999 個の数の中に，2 で割っても，3 で割っても，5 で割っても割り切れない数は，全部で何個あるか。

43. オイラー関数 $\phi(n)$ とは，$n > m$ で n と互いに素な自然数 m の個数をいう。

(1) n が素数ならば，$\phi(n) = n - 1$.

(2) n が素数べき ($n = p^\alpha$) ならば，$\phi(p^\alpha) = p^\alpha(1 - 1/p)$.

(3) $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_c^{\alpha_c}$ (素因数分解) のとき，$\phi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \cdots (1 - 1/p_c)$.

44. ある人が n 人の友人に手紙を出すことにした。書いた手紙を秘書に頼んで，宛名書きのしてある封筒に入れてもらったが，どの手紙も正しい封筒に入っていなかった。このように，どの n 通の手紙も正しい宛名の封筒に入っていない組合せは何通りか（モンモールの封筒取違え問題)。

III. 他の興味深い問題を提示する。

45. ある宿泊所は７室あり，10 人の客がいる。この 10 人の客にカギを，次の条件『10 人のうちのどの７人を選んできても，その人たちがそれぞれ７つの異なる部屋に入ることができる』が満たされるように渡したい。このときカギは，最低，何個必要か。

46. 正 n 角形の n 個の頂点に対して，

(1) これらのうちの任意の３点を結んでできる三角形の総数を求めよ。

(2) 上の三角形のうちで鋭角三角形となるものの総数を求めよ。

47. n を自然数とするとき，次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $1111^n - 1109^n$ は 2 で割り切れる。

(2) $11^n - 8^n - 3^n$ は 24 で割り切れる。

(3) $2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 1980 で割り切れる。

48. 座標空間の点集合 S を次のように定める。

$S = \{(i, j, k) : 0 \leq i, j, k \leq 4 \text{ なる整数}\}$

S の各点に蜜が配置してある。点A(1, 1, 2)にいる蝶が 125 ヶ所に配置されている蜜をすべて吸って，再び点Aに戻る距離 125 のルートは存在するか。

49. 8 x 8 サイズの部屋に，畳半畳分（サイズ 1x1）のコタツを１個掘る。その後，この部屋を 1x3

サイズの変形畳で敷き詰めたい。どこにコタツを掘ればよいか。

50. M夫妻は最近，同伴でパーテイに出席し，そこには他に５組の夫婦が同伴で出席していた。色々な人々の間で握手が交わされた。どの人も自分の同伴者とは握手せず，どの人も同じ人と２度以上は握手をせず，また当然だが，だれも自分自身とは握手をしなかった。握手をした後，M氏は，彼の妻を含めた各人に，他の人と何回握手したかと尋ねた。驚いたことに，どの人も異なる回数を答えた。さて，M夫人は何回握手をしただろうか。

（本稿は、中間報告書の同名の論文の再掲載である。）

離散数学の数学における位置付け

景山　三平
広島大学大学院教育学研究科

高等学校での数学教育の目的・目標から，離散数学における３つの価値について述べる。

①将来の社会や諸科学などにとって価値がある，すなわち，実用的価値。

②生徒の能力や態度の育成で価値がある，すなわち，人間形成的価値。

③数学の発展にとって価値がある，すなわち，文化的価値。

②については，第１章に記述しているので本章では触れない。また，①③については，離散数学の特徴を考えると，それを区別して記述することは困難である。それは，離散数学はその本質に応用を内在しているとも言えるからである。そこで，数学の中での離散数学の位置づけを意識し歴史等を含めた文化性・実用性について合わせて記述する。

１．概論

組合せ数学（combinatorial mathematics，combinatorics）とは，特定の条件を満たす（普通は有限の）対象からなる集まりを研究する数学の分野であり，組合せ論（combinatorial theory）ともよばれる。特に問題とされることとして，集まりに入っている対象を数えたり（数え上げ組合せ論），いつ条件が満たされるのかを判定し，その条件を満たしている対象を構成したり解析したり（組合せデザインやマトロイド理論），最大または最小あるいは最適な対象をみつけたり（極値組合せ論や組合せ最適化），それらの対象が持ちうる代数的構造をみつけたり（代数的組合せ論）することが挙げられる。

魅力ある数学の一分野である組合せ論は，情報科学，工学，物理科学，社会科学，経済学，オペレーションズ・リサーチなどに数多くの応用がある。これには，離散的かつ組合せ的な性向をもつコンピュータが発達したことも力となり，応用数学におけるこの分野の重要性が大いに高められた。

紀元前二千年もの昔に，中国ではある種の魔方陣が知られていたという。その後，世界のいろいろな所で組合せ数学的なものはくすぶり続けた。イギリスの神父 T. P. Kirkman により 1847 年に提示された女子学生散歩問題は現在のデザイン論の発祥の問題となっている。またアダマール行列については 1867 年に J. J. Sylvester が問題を発見し，1893 年に J. S. Hadamard がその特徴づけに成功した。しかし，その一般的な存在性は現在でも証明されていない。このように組合せ論の問題の一部は，組合せ解析（combinatorial analysis）の名のもとで古くから研究されていたが，広範囲にわたる本格的な研究が行われるようになるのは，コンピュータの出現する 1940 年代以降のことである。組合せ論という名前は，1666 年に印刷された G. W. Leibniz の論文 Dissertatio de Arte Combinatoria の中に現れた。その 300 年祭を祝って，1966 年に国際研究雑誌 Journal of Combinatorial Theory が創刊されたが，これが組合せ論が社会的に明確に認識された時期である。これ以降，グラフ理論を含めた組合せ論研究に関するいくつかの国際研究雑誌が創刊されている。1970 年代からは，より広汎で野心的でさえある combinatorics なる名称が，もともとはドイツ語に基づくとはいえ，広く用いられていることは周知の事実である。同時に，1971 年に国際研究雑誌

Discrete Mathematics（離散数学）も創刊されている。離散数学という名称が国際的に認知されたのはこのアカデミックな雑誌を通しての活発な研究論文発表活動のお陰であると認識している。以後，離散数学という名称を含む Discrete Applied Mathematics (1979) や Annals of Discrete Mathematics 等々の国際研究雑誌が発行されている。これは combinatorial（組合せ的）と discrete（離散的）がアカデミックにも融合してきたことを意味しているのだろう。この分野の急激な成長の理由の一つとして，多くの数学者が離散数学には多くの興味ある問題が豊富にあり，同時に，数学の他の分野に対する応用も多いことを認識してきたことがあげられる。

組合せ論で重要な概念の一つの差集合が 1938 年に J. Singer の論文 A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory で定理として発表され，翌 1939 年には，R.C. Bose によりその概念が組合せデザインの構成問題に多大の貢献をすることが示された。また，数え上げ（enumeration）組合せ論については，起きうる事象を数え上げることが 17 世紀のパスカルらの仕事に始まる初等的な確率論で重要な問題になってから，ヨーロッパで大きな関心を集めるようになった。現代的な組合せ論は 19 世紀の終わりに発展を始め，M.P.A. MacMahon（マクマホン）の系統的な書 Combinatorial Analysis I, II (1915, 1916) と J. Riordan による書 An Introduction to Combinatorial Analysis (1958) がこの分野の初期の代表的な著書である。これらは，R.A. Fisher による実験デザインに関する 1920 年代の一連の仕事などを経て，20 世紀にははっきりとした研究分野として確立した。現代組合せ論の創始者とよばれている G.C. Rota の弟子で，現在，数え上げ組合せ論の世界の第一人者である Richard P. Stanley の書 Enumerative Combinatorics, Vol. I (1986), Vol. II (1999)はこの分野の成熟度を示している。彼は，この書で 2001 年にアメリカ数学会よりスティール賞（Leroy P. Steel Prize）を贈られた。

また，筆者自身が最初に読んだ 1963 年出版の H.J. Ryser による書 Combinatorial Mathematics における組合せ数学に関する 9 つの話題についての簡潔でエレガントな記述内容は，今の組合せ論の基礎を与えている。組合せ論の研究は 1967 年の Marshall Hall Jr. の書 Combinatorial Theory の出版以来非常に活発になった。

この頃に，数学史上未曾有の大事件が起こった。それは，L. Euler（オイラー）が 1782 年に「n 次のオイラー方陣の不存在」を予想し，1900 年頃 G. Tarry が n=6 の時の不存在を示したが，1959 年に n が 2, 6 以外では常にオイラー方陣は存在することを，R.C. Bose, S.S. Shrikhande, E.T. Parker の 3 人が示したことである。この 177 年にわたる難問の解決は，アメリカ数学会で発表され，1959 年 4 月 27 日の New York Times 紙のトップ記事となった。当初の予想に反して，否定的に解決されたのも珍しいことである。これらの出来事を含めて，筆者は 1960 年代に組合せ論は認知された分野になったと考えており，その後のこの分野における発展にはめざましいものがある。統一的な理論も進歩して，組合せ論は美しいエレガントな純粋数学の一分野となった。様々な研究者が離散数学の問題に興味を見出していった。特に，有限群論研究者がデザイン理論やグラフ理論の分野の諸問題の解決に多大の貢献をした。ちなみに，オイラー予想を反証した 3 人については，Bose は幾何学者，Shrikhande は数理統計学者，Parker はコンピュータ科学者であった。

同様なことを我々は知っている。それは 1976 年 8 月 31 日の新聞記事である。アメリカ数学会で米国の 2 人の数学者 K. Appel と W. Haken が，「四つの色さえあれば，どんな複雑な地図でも塗り分けることができる」という四色問題を肯定的に解決したというものである。実に 130 年来の難問が解けたことになる。この証明は，非常に難解で本質的にコンピュータによる膨大な数の場合の解析に依存していたが，1995 年に改良されかなり簡単になった（N. Robertson, D.P. Sanders, P.D.

Seymour, R. Thomas)。しかし，現在のところ，手計算で証明を完成させた人はいない。ともかく，この解決は，離散数学，特にグラフ理論の研究者の多くにとって極めて大きな出来事であった。このグラフ理論は，組合せ論の一分野でありながら，独自の体系を形成し一つの独立した数学分野と認められつつある。群論，トポロジー，回路網理論，システム理論，オートマトン理論，計算過程の理論などの諸分野に多くの応用を有している。最近のグラフ理論における大きな業績に，1980年代前半からのN. Robertson, P. Seymourらによる Graph Minor Theory（グラフ・マイナー理論）がある。これはグラフ理論のみならず，組合せ論全体，あるいは低次元位相幾何学の一種である結び目理論，計算量の理論，最適化理論，マトロイド理論などに大きなインパクトを与えている。

インターネットのセキュリティ技術にRSA暗号などの公開鍵暗号が用いられているが，RSA暗号の基本原理では，フェルマーの小定理，オイラーの定理などが重要な役割を果たしている。これらはそれぞれ，1600年代，1700年代の結果であるが，時代を超えて現代に離散数学の歴史的な定理が生きていることを如実に実感できる良い例である。

{注１：　ＲＳＡ暗号は，インターネットでも広く利用されている話題の暗号で，Rivest, Shamir, Adleman という３人の研究者によって考案され，その名称はそれぞれの名前の頭文字を取って付けられたものである。桁数が大きい合成数の素因数分解問題が困難であることを安全性の根拠とした公開鍵暗号の一つである。 暗号(Cipher)とデジタル署名(Digital signature)を実現できる方式として最初に公開されたものである。注２：フェルマーの小定理は，

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (pは素数，aはpの倍数ではない整数) を示し，オイラーの定理は，nを正整数とし，aをnと互いに素な整数とするとき，$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ が成立する，を意味している。$\phi(n)$はオイラー関数を示す。}

しかしながら，日本で，現代の最先端科学技術の一つである情報科学やコンピュータ・サイエンスの基礎数学として，その重要性が認識され，離散数学と題名がついた書物が出版されたのは，1980年代頃である。日本で最初の「離散数学」という名の本は，高橋磐郎・藤重悟（1981；岩波書店）によるものであろう。それ以来，離散数学に関連する書物は増えてきた。

最近の話題に移ると，国際数学者会議（ICM）で伊藤清が初代ガウス賞を授賞した。また日本人には1936年にオスロの国際数学者会議でスタートしたフィールズ賞（数学のノーベル賞ともいわれる）の受賞者もいる。しかし，情報科学の基礎分野に大きく貢献した研究者に贈られるネヴァンリンナ賞には日本人の受賞者はいない。1966年から始まったACMのチューリング賞，1969年から始まったSIAMのポリア賞にも日本人の受賞者はいない。しかし，もう一つの賞，離散最適化の分野で権威のあるファルカーソン賞には日本人の受賞者がいる。

その４年に一度開催される国際数学者会議においても，Discrete Mathematics and Mathematical Aspects of Computer Scienceという部門がある。この分野は，組合せ論，グラフ理論を中心にして，論理と集合，順序系と代数系，言語とオートマトン，アルゴリズムやプログラミング，確率やオペレーションズ・リサーチなど広範囲にわたっており，離散的対象の研究および連続的対象の離散的な取り扱いが主となっている。今後も離散数学はコンピュータ・サイエンスに役に立ち，基礎的な数学的道具を提供し，またコンピュータ・サイエンスは離散数学に興味深く新鮮な問題を提供し，互いに補い合いながら発展するものと思われる。このように，離散数学は情報科学の基礎となる重要な分野である。今後日本人の情報科学分野での国際競争力を底上げし，日本が世界に冠たる数学者あるいは情報科学者を輩出するには，高校生のうちから離散数学の基礎を学ん

でおかなければならないであろう。これらの意味からも，高校数学の中に離散数学を取り入れる必要がある。

近年の主要な組合せ論学者には，主に極値組合せ論に関する仕事をしすばらしい問題を提起し解き続けたポール・エルデシュ（Paul Erdos）や，1960年代における数え上げ化・代数化の定式化に大きな役割を果たしたジアン・カルロ・ロタ（G.C. Rota）がいる。ロタは，クロネッカー（L. Kronecker）の有名な言葉 God created the integers; everything else is man-made に対して，有限・離散の立場からむしろ God created infinity, and man, unable to understand infinity, had to invent finite sets の方がより適切な表現であろうと述べている。有限と無限，離散と連続にかかわる問題は，哲学，科学，数学などの中心テーマであることに変わりがない。

{注：ポール・エルデシュはハンガリーの数学者で，生涯に1500編もの論文を発表しており，20世紀史上最高記録である。その業績は広範囲にわたり，数論，組合せ論，グラフ理論を初め，集合論，確率論，級数論など幅広い分野で膨大な結果を残した。その中でも良く知られたものの極々一部には，素数定理の初等的な証明や，グラフ理論・数論などにおける確率論的方法，組合せ論の種々のテクニックなどは著しい。彼の数学は，次々に問題を考えてはそれを解くという独特のスタイルであったが，彼が発する散発的な問題で実際には理論的に重要なものであったり，あるいはある新しい理論の発展に非常に重要な貢献をした例も少なくない。}

離散数学の中で極値集合論のように複雑な離散構造のなかに潜む法則を見出すことは，数学の根本にかかわる発見をすることである。C. E. Shannon の符号化定理やイプシロン-エントロピー（epsilon-entropy）などは数学のみならず物理学，情報科学を始めとする様々な分野とかかわっている。特に，1948年に Shannon の論文 A mathematical theory of communications が発表され，情報理論の基礎が築かれ，誤り訂正符号の理論が進歩し，昨今のコンピュータ・ネットワークの発展に伴う情報セキュリティに関する暗号の理論へと発展し続けている。

離散数学は論理的思考力を身につける良い学習対象であり，複雑な自然・社会システムを整理して表現する良い表現手段である。また，アルゴリズムなど論理過程のグラフ表示化で考え方が整理できる計算機のプログラミングを学ぶことも必要であり，きれいなプログラムはきれいな論理思考から生まれるといえる。

作業の流れを矢線図で書き，作業の効率化をはかる PERT の考え方は現在の職場ではかなり浸透しているが，このような作業工程の有向グラフによる表現法を学んでおくことは実社会で工程管理などをする上で有用な基礎となる。

このように，離散数学の問題は現代社会の様々な問題とかかわりあっている。

2．展開

ノーベル賞に数学部門がない理由として広く伝わっている話では，アルフレッド・ノーベルが数学者ミッタークレフラー（スウエーデン）に決してノーベル賞が授与されないようにしたかったからだ，となっている。1970年代から，すべての学問分野が益々数学的な手法を使うようになり，いつかは数学者が数学以外の分野においてとはいえ，ノーベル賞をとるようになるのではないかと思われるようになってきた。実際，たとえばケネス・アウロは，1972年に経済学における極めて数学的な業績でノーベル賞を受賞している。逆に，このノーベル経済学賞が授与された数学者もいる。

以下，“広い意味で”離散数学の分野の研究に授与される国際的ないくつかの賞（1）～（6）について記述する。これらの賞の存在自体が離散数学は数学であることをも意味している。またそれ

らの賞の受賞者の顔ぶれをみると，1960年代から純粋数学という世界の中で離散数学の重要性やそこでの諸課題に関する研究も高く評価されていることを感じることができる。

（1）ガウス賞について

ガウス賞（Carl Friedrich Gauss Prize）は，社会の技術的発展と日常生活に対して優れた数学的貢献をなした研究者に贈られる賞で，4年に一度の国際数学者会議の開会式において授与される。フィールズ賞やネヴァリンナ賞と異なり，受賞資格に年齢制限はない。これは，その人の業績が知られ実社会に広まり影響を及ぼすまでに，時として非常に長い時間を要するためである。

これは2002年ドイツ数学会と国際数学連合が共同で設けた賞で，第1回授賞は2006年であった。その名は「数学の王様」ガウスが1801年一旦は発見されながら見失われてしまった小惑星セレスの軌道を最小二乗法の改良により突き止め，再発見を成功させた故事に由来する。受賞者には金メダルと賞金が授与される。本賞の基金には1998年にベルリンで開かれた国際数学者会議で生じた余剰金が充てられている。メダルの意匠は表面がガウスの肖像，裏面がセレスの軌道を表す曲線と円（小惑星），正方形（square：最小二乗法に因む）が描かれている。

第1回ガウス賞は，2006年8月スペイン・マドリードでの国際数学者会議で，伊藤清に授与された。彼は，確率微分方程式の分野の創始者，後に，確率微分方程式が，ブラックショールズモデルと呼ばれる株価の経済モデルに適用され，現在の数理ファイナンス，金融工学の隆盛の基礎理論となっている。

『確率微分方程式を生み出した伊藤の補題（伊藤の定理）でその名を知られる。さらに，確率積分を計算する上で重要な伊藤の公式(伊藤ルール)は確率解析学において革命的な公式といえよう。特に伊藤の公式は確率解析学における基本定理で，確率積分の計算手段を示したもので，この公式無しでは確率解析における計算はほぼ不可能といえる。ノーベル経済学賞受賞のマイロン・ショールズが伊藤に会った際に，一目散に握手を求めて，彼の理論を絶賛したという。このエピソードから分かるように伊藤の業績は数学だけに留まらず社会科学にも多大な影響を与えている。』（webからの引用）

（2）ロルフ・ネヴァンリンナ賞について

フィンランドの大数学者の名前を冠したロルフ・ネヴァンリンナ賞（Rolf Nevanlinna Prize）は，計算機科学における優れた数学的貢献をなした研究者に贈られる賞である。4年に一度の国際数学者会議において授与され，フィールズ賞と同じく40歳以下の研究者にのみ受賞資格がある。1981年，国際数学連合が設けた賞で，前年に死去したフィンランドの数学者ロルフ・ネヴァンリンナにちなんで名付けられた。実際は1983年からスタートし受賞者には金メダルと報奨金が授与される。受賞者は4年に1回ずつで今まで7名が受賞している。

どこまでが離散数学でどこからが計算機数学なのかは非常にあいまいであるが，たとえば，下記の2人は離散数学の研究者と言ってもよいと思う。彼らは，ネヴァンリンナ賞受賞者である。R. E. Tarjan（ロバート・タージャン）は，第1回目（1983年）の受賞者で，離散数学の一分野である組合せアルゴリズム論で顕著な業績をあげた（深さ優先探索やグラフの平面性判定などの効率のよいアルゴリズム）。このとき，タージャンの業績について話したヤコブ・シュワルツは「純粋数学は，有限であろうと無限であろうとその構造研究に際して，効率の問題をまったく考えなくてもよいという贅沢ができる」と言っている。また，Peter Shor（ピーター・ショア）は，1998年に受賞し，

量子コンピュータが出現するとRSA暗号が崩壊することを示し，量子暗号，量子符号などの基礎を築いたが，これらには，従来の符号，暗号の基礎知識が非常に重要な役割を演じている。

ここで，数学における大きな時代的な流れを考える。オイラーが活躍した18世紀の算法（アルゴリズム）の時代，カントール，ヒルベルト，ワイエルシュトラスなどによる19世紀後半から20世紀前半にかけての数学の基礎付け，公理的アプローチとその結果としての“存在定理”王位の時代，そして現代は，デジタルコンピュータの出現により，数学のみならずあらゆる科学技術が，離散アルゴリズム論的傾向の時代となってきている。こういう時期での第1回ネヴァンリンナ賞の受賞者がこの分野から出たのは，現代の科学を象徴することの一つである。

日本人の中には小平，広中，森のフィールズ賞受賞者もいるが，ネヴァンリンナ賞受賞者には日本人はいない。これは，日本の情報科学の基礎分野での研究が世界水準に達していないことを示しているといえるのかも知れない。アメリカ，ヨーロッパ，中国，インドの情報科学やIT分野における競争力に対抗するには，その基礎分野である離散数学の教育が必要不可欠である。離散数学分野でフィールズ賞を取れるようにということではなく，フィールズ賞，ガウス賞以外にもう一つ国際数学者会議には大きな賞があること，それがネヴァンリンナ賞で，日本では一般の人にはあまり知られていない。多方面でこのような賞の重要性を認識してもらいたい。また，日本の数学を「忘れられた科学」から脱却させ，現在の純粋数学だけでなく，離散数学をより幅広く数学として捉えてほしい。

（3）チューリング賞について

計算機科学分野で優れた功績を残した人に年に一度，ACMが贈る賞で10万ドルが授与される。ACMとはAssociation for Computing Machineryの略で，アメリカ合衆国の計算機科学分野の学会で1947年の設立である。日本語ではアメリカ計算機学会ともよばれている。計算機科学分野では最高の賞とされていて，文学や物理学でいうところのノーベル賞に匹敵する権威ある賞とみなされている。チューリングは，現代計算機科学の父の1人とされるアラン・チューリングの名にちなんでいる。

1966年からスタートし，2005年までに40名が授賞しているが，日本人の受賞者はいない。その中で，ネヴァンリンナ賞受賞者のロバート・タージャンの名前を1986年に見ることができる。筆者の研究の興味もあるが，有限体上での多項式計算で多大な貢献をしたドナルド・クヌース(Donald E. Knuth)は1974年に授賞している。彼は，数学研究者の間で一番ポピュラーな言語ソフトであるTexの開発者としても有名である。

（4）ポリア賞について

このポリア賞（George Polya Prize）はSIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics)が，二つの分野（組合せ論領域とジョージ・ポリアが関心をもっていた数学領域）での応用研究に関しての顕著な功績に対して，2年ごとに贈る賞（二つの分野で交互）で，1969年からスタートした。2万ドルの副賞もある。1992年からすこし授賞範囲が拡大された。最初の受賞は1971年で，2006年までに29名が授賞している。この中には，グラフ理論研究からR. L. Graham (1971), L. Lovasz (1979), デザイン論研究からR. M. Wilson (1975)を見ることができる。前述のR. P. Stanleyも1975年に授賞している。残念ながら，これまで日本人の受賞者はいない。

（5）ファルカーソン賞について

ファルカーソン賞（Fulkerson Prize）は，3年に一度選考される離散最適化の分野で最も権威のあるもので，1977年に離散数学の賞として，数理計画学会とアメリカ数学会によって設けられた。日本人で初めての受賞は2003年の藤重悟と岩田覚で，世界でも20数件目である。

（6）カナダに本部のあるICA (Institute of Combinatorics and its Applications；組合せ論とその応用学会）が，会員に対して授与している三つのメダル（組合せ論分野の研究でも多大の貢献をした3人の名前を冠した賞である）

1）Euler Medal：1993年にスタートし毎年高々2名が授賞対象となる。組合せ論研究への貢献が生涯に渡って顕著でアカデミックな経歴をもち，現在も活躍中の者へ授与される。日本人の受賞者はいない。

2）Hall Medal：1994年にスタートし毎年高々3名が授賞対象となる。年齢が41歳未満の者で組合せ論研究で顕著な仕事をした人に授与される。日本人として原田昌晃（2004）が授賞した。

3）Kirkman Medal：1994年にスタートし毎年高々3名が授賞対象となる。学位取得後4年以内の若手組合せ論研究者で顕著な業績をあげた者に授与される。日本人として松本眞(1997)，河原林健一（2003）が授賞している。また日本の大学で学位を取得し日本の大学に勤める繆いん（中国籍）(2001）も授賞した。

（7）エントロピー関係

L. Lovaszの5頂点サイクルグラフなどに関する有名なzero-error capacityの論文（1979）があるが，これは，グラフ理論的手法を用いてその証明がなされており，離散数学の有用性を示すと共にグラフ理論に新しい未解決問題を提起している。最近では，数理ファイナンス，物理計算などの分野で数百次元の超高次元積分が行われることがあるが，それらには，超高次元一様性を有する乱数列が用いられる。そのような乱数列のランダム性を表すmeasureの一つにA.N. Kolmogorovの複雑度（complexity）やイプシロン-エントロピー（epsilon-entropy）があるが，これは組合せ論と非常に関係が深い概念であり，極値集合論などにも出てくるようである。

{注1：zero-error capacityは，Shannon（1953）によって定義された概念である。q進符号の間で生じるerrorが限定されたシンボル間にのみ存在する状況で，誤り確率が小さければ，うまい符号化をすることにより誤り無しで送信をすることができるかという問題であり，Shannonが提示した例についてLovaszがグラフ論的手法を用いて解いた．のちにポリマトロイドなどの概念を用いた研究に発展しており，この分野には日本人も大きく貢献している．ちなみに，このポリマトロイドは，伊理正夫，韓太舜，藤重悟，室田一雄，岩田覚という一連の流れで，今では，最大流最小カット問題などの双対性を持つグラフの問題なども含む離散凸解析という分野が創始され，この分野は日本がリードしている数少ない分野の1つでもある。注2：乱数列の複雑さを表す基準のひとつとして，その乱数列を生成するチューリングマシンのプログラムの長さで測るKolmogorov complexityがあるが，与えられた乱数列を確率ε以内の誤り(精度)で再現するために必要な情報量（プログラムの長さ）がepsilon entropyであり，離散と連続を結ぶ概念とも言える．}

複雑な離散構造のなかに潜む法則を見出すことは，数学の根本にかかわる発見につながることが

あり，Erdos や Lovasz らによって研究が始められた極値集合論はそのような離散数学の重要な道具を提供している。また，Shannon の符号化定理，epsilon-entropy などは数学のみならず物理学，情報科学を始めとするさまざまな分野とかかわっている。離散数学は論理的思考力を身につける良い学習対象であり，複雑な自然・社会システムを整理して表現する良い表現手段である。アルゴリズムなど論理過程のグラフ表示で考え方が整理できる計算機のプログラミングを学ぶことも必要であるが，それはきれいなプログラムはきれいな論理思考から生まれるからである。作業の流れを矢線図で書き，作業の効率化をはかる PERT の考え方は現在の職場ではかなり浸透しているが，このような作業工程の有向グラフによる表現法を学んでおくことは，実社会で工程管理などをする上で有用な基礎となる。

{注： PERT は program evaluation and review technique というオペレーションズ・リサーチの基本的概念で，作業の関連をグラフで表し，企業などでのプロジェクトの作業効率を高めるための手法である。各辺に長さが与えられている有向グラフの最短パス長を求めるアルゴリズムで，その基本的な考え方は中学生でもわかるような簡単な概念である。もう一つ，身近な例として，車のナビでは，グラフの最短路アルゴリズムが使われているが，これも高校生に示すには良い実例である。}

（8）コンピュータ・シミュレーション関係

擬似乱数の生成の分野にも応用例をみることができる。乱数とはでたらめな数のことであるが，でたらめなものを作ることは意外と難しい。そのような乱数はコンピュータ・シミュレーションなどで利用されており，1 回のシミュレーションで 1 億個の乱数を必要とすることも少なくない。そのため，高速でしかもランダムな数を生成する手法の開発が必要とされている。また，追試などのために再現性（後日，同じ乱数の列を生成すること）も要求され，数学の一つの分野である有限代数の理論に基づく方法が多く使われている。この成果により，Kirkman メダルの受賞者でもある松本眞は文部科学大臣表彰 科学技術賞（開発部門），船井情報科学振興賞や日本 IBM 科学賞を受賞している。松本らの擬似乱数は Merssenne-Twister とよばれているが，それは，30 桁程度の (0,1) 区間の乱数とみなすと数百次元の高次元一様性を有しており，数理ファイナンスなどの超高次元積分に適していることが示されている。

離散的な考え方はコンピュータ・シミュレーションで多用されている。たとえば，工学的な問題を微分方程式を用いて定式化することは日常的に行われている。方程式の解の具体的な形を求めることは現在の数学では困難であるため，コンピュータによる解の近似値を求めることが多い。コンピュータで扱うために離散化とよばれる操作を行う必要があるが，離散化の方法によって，近似解の品質に大きな差が生じる。工学の分野で多用されている離散化の方法の一つに有限要素法がある。従前は職人的な工夫をして計算していた。誰にでも使えるようにするためのヒントが発見されて 30 年になるが，その間，多くの成果があがり，現在も研究が発展している。

コンピュータ・シミュレーションは離散化を伴うので，ほとんどの場合，近似計算を行うことになる。しかし，コンピュータで近似ではなく正確な計算を行うための手法も開発されており，精度保証付き数値計算とよばれている。このアイデアは，問題のどの部分を離散化するかを見極めることである。言い換えると，離散化しなくても正確な計算ができる部分を上手に処理することである。この分野では，50 年以上前に占部実によって先駆的な研究がなされ，約 10 年前に，その重要性が再認識され，主として，日本やドイツなどで研究が進行中である。

（9）数独について

「すうどく」とよばれるパズルが世の中でブームになっている。これは一部の値が与えられた9x9配列から特殊なオイラー方陣を完成させるパズルである。パズルらしく，問題自体は誰でも理解できるほど簡単である，しかし問題を解くには論理的に試行錯誤を繰り返して解を見つけ出さなければならない。このようなパズル的で論理的試行錯誤を鍛錬するための問題が組合せ論の中にはたくさんある。これらは暗記ではなく，試行錯誤から解法や性質を発見する数学本来の教育方針に最も適している教材である。Erdos や Lovasz を始め，高名な離散数学者を多数輩出しているハンガリーでは初等教育の数学から，組合せ論的な「考えさせる問題」を多数教材に使用していることは注目すべきである。

（10）解決手法について

組合せ論の分野には，多くの定理があるが，問題を解決する手段として定着しているのは，1946年 Erdos により導入された確率的手法である。これは存在を示そうとする対象物を具体的に構成することでなく，ある条件をみたす対象物の存在性を示せる利点をもっている。もう一つ，線形代数的手法がある。これは，様々な対象物の組合せ的性質を導出するのに有用なものである。

3．結語

ガウスが数学の女王とみなした初等整数論と，組合せ論とは姉妹科学であるといわれる。その理由は，提起される問題が誰にでもわかる明快かつ美しいのにもかかわらず，解決のためのアルゴリズムの発見には意外な努力を要することがしばしばであるというのが一点であろう。また他の一点はむろん，すべてが離散的世界で起きるというところにある。現在では，初等整数論は離散数学の分野の中には含めない傾向にある。しかしながら，数学論理構造の中で，離散数学は巨大に成長した分野になりつつある。

このことを踏まえても，「数学の発展にとって価値がある（文化的価値）」として，なんとなく，数学の中心にいる分野を発展させるために離散数学を脇に位置づけるのではなく，離散数学そのものの産業的，文化的価値を認めるべきである。文化的価値と産業・社会的価値は必ずしも分離できないのではないかと考える。

たとえば，インターネット通信，量子通信，量子コンピュータなどを論じ始めると符号，暗号などの離散数学の基礎知識が必要になるが，今後，量子通信を含む情報通信の基礎は一般常識として，高校生もある程度学ばなければならない社会の文化であると考える。

科学技術創造立国を目指す日本には，離散数学の高校数学への導入は欠かせないものではないだろうか。

最後に，離散数学の一部を問題を通して理解するために，組合せ論における解決済みの問題を集めた膨大な資料として Lovasz (1993) やロシアの中学生，高校生向けの数学問題集として D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg (1996) を推薦したい。両書とも高校生でも十分に読める本で日本語訳が出版されている。前者は，東海大学出版会から４冊（『数え上げの手法』『グラフの構造』『グラフの不変数』『集合論的グラフ理論』）に分けて出ている。後者は，岩波書店から２冊（『数学のひろば―柔らかい思考を育てる問題集―I, II』）(1998) に分けて出版されている。

高等学校へ導入する離散数学の教育課程への位置付け

正田　實
元文部省主任視学官・元滋賀大学教授
前国立教育政策研究所客員研究員

【要約】高等学校の学習指導要領の７回の改訂は，大きく３つにわけて考えることができる。第１期は，戦後の混乱期で昭和 26 年の改訂であり，指導しやすい形を求めたものである。第２期は，拡大期で昭和 30 年，昭和 35 年，昭和 45 年の改訂であり，数学教育の現代化の潮流などを追い風にして，新しい学習内容を取り入れたものである。第３期は，後退期で昭和 53 年，平成元年，平成 11 年の改訂であり，すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減するなどの原則的な制約が教科の要請を超えたところで課されるようになったものである。今後，高等学校数学の学習内容を時代の変化に対応して改善することが必要であり，離散数学という新しい内容を積極的に導入することによって，内容を充実し，微分・積分を頂点とする単頂型になりがちな高等学校数学を多頂型に変革するきっかけとすることができる。その際，離散数学の高等学校数学科の教育課程への位置付けとしては，現行の科目構成が継続すると仮定して，それらの内容を取り込むことを考える。

１．はじめに

高等学校・数学の学習指導要領は，進学率の上昇に伴う多様化対応，数学を将来直接的に必要とする生徒に対する学力水準の維持，数学及び数学教育の世界的な動向や経済社会の要請などの変化への対応を改訂のポイントとすることが求められてきたと考えられる。

しかしながら，現代化への批判を受け，軌道修正を迫られてからは，多くの制約を受けて萎縮せざるをえなくなった。

このため，変化への対応が十全にはなされず，停滞感が充満し，改善のポイントである「学び方」を身に付けさせるなど空文になりかねないと懸念されるようになっている。

改訂に伴って受けてきた制約について振り返り，世界的な潮流にも配慮できるような態勢つくりを図る必要がある。

２．学習指導要領の変遷

新制の高等学校が発足した昭和 23 年には，高等学校の教育内容は一種検定の教科書として，「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」の３科目，いずれも５単位が示され，いずれか１科目を選択し必修することとされていた。

以後７回の大きな改訂が行われている。

（１）昭和 26 年の改訂

学制改革に伴い早急に示さざるを得なかったため，実施の経験と調査研究に基づいて改訂する必要があった。

昭和 23 年から始めて，26 年５月まで審議し，11 月には，「中学校・高等学校　学習指導要領　数学科編（試案）」を公表している。

進学率が40%にも達したことを受けて，中学校の生活経験を中心とした学習を引き継ぐ「一般数学」を加えて，「一般数学」，「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」の４科目構成になった。これは，基本的な路線を変えるものではなく，実態に合わせることと，多様化への対応を図ろうとしたものであったが，「一般数学」はこの科目で数学の学習を終わるようになっていたので，十分に成果をあげることはできなかった。

（２）昭和30年の改訂

数学科としての系統的な指導を行いやすくするため，高等学校だけを改訂している。ここでは，科目選択を改め，統合型にしている。

必修として「数学Ⅰ」（６単位または９単位）（以下では単位数を数値のみで示す）をおき，続いて「数学Ⅱ」（３），「数学Ⅲ」（３・５）としている。また，職業を主とする専門学科に進む生徒には，「数学Ⅰ」に続いて「応用数学」（３・５）を選択できるようにしている。

「数学Ⅰ」には，「代数的内容」と「幾何的内容」をおき，教科書は「代数編」，「幾何編」として編集された。そして，それらを統合する数学的な考え方を「中心概念」としてあげている。

戦後の混乱期を抜け出して，学力水準を維持するためには，高等学校の学習内容を系統化する必要があるとの考えに基づき，系統化を図ったと見ることができよう。

（３）昭和35年の改訂

昭和 33 年に，小学校・中学校の学習指導要領が，基礎学力の向上と科学技術教育の振興を目指して改訂され，学習内容の系統化が図られた。これを受けて高等学校の学習内容を調整する必要があった。

ところで，進学率が58%にも達したことから，分岐を進めて前回改訂の趣旨をさらに徹底することをねらいとしている。

「数学Ⅰ」（５），「数学ⅡA」（４），「数学ⅡB」（５），「数学Ⅲ」（５），「応用数学」（６）をおき，原則として，「数学ⅡA」，「数学ⅡB」または「応用数学」のうちいずれか１科目を，履修することとしている。

「幾何編」の内容のかなりの部分を中学校へ移行したことから，「数学Ⅰ」では図形の扱いは軽減され，かわりに「数学と論証」をおいたが，指導しにくいといわれ効果的な対応はできなかった。

（４）昭和45年の改訂

世界的な傾向として，数学や科学技術のめざましい進展に対応するための数学教育の現代化が進められた。我が国においても，この方向に沿った研究が盛んになされ，このような動向に沿った改訂が，小学校は昭和43年，中学校は昭和44年，続いて高等学校でもなされた。

ところで，進学率は80%を超えたことから，さらに分岐を進めるとともに，前回の方向を引き継いで教育内容の現代化を図っている。

「数学一般」（６），「数学Ⅰ」（６），「数学ⅡA」（４），「数学ⅡB」（５）「数学Ⅲ」（５），「応用数学」（６）をおき，「数学一般」または「数学Ⅰ」のいずれか一方を，すべての生徒が履修しなければならないとしている。

「数学Ⅰ」の内容としては，

A　代数・幾何　(1)数と式　(2)方程式と不等式　(3)ベクトル　(4)平面図形と式
B　解析　(1)写像　(2)簡単な関数　(3)三角関数
C　確率　(1)確率
D　集合・論理　(1)集合と論理

をあげていて，現代化を図り系統性を明示したものであり，程度の高いものである。

高等学校としては，「数学ⅡB」の「平面図形の公理的構成」は指導しにくいとされていたが，概ね歓迎されていた。

ところが，「小学校で集合論を教えている」「計算力が低下している」などの批判を招き，小・中学校の現代化は後退せざるをえないことになり，高等学校においても，その影響を大きく受けることになる。

（5）昭和53年の改訂

現代化の軌道修正をめざした改訂が小・中学校においては昭和52年になされ，続いて高等学校について改訂されている。

ここで，選択の機会を拡大するため，「4単位を超える科目は作らない」ことを原則としている。この原則を守りながら，数学を将来直接的に必要とする生徒の学力水準を維持する方策として，内容を精選して科目独立型へ移行している。

すべての生徒が履修する科目として「数学Ⅰ」（4）をおき，これに続いて，「数学Ⅱ」（3）「代数・幾何」（3），「基礎解析」（3），「確率・統計」（3），「微分・積分」（3）をおき選択して履修することとする。ただし，「微分・積分」は原則として「基礎解析」を履修した後に履修させることとしている。

（6）平成元年の改訂

時代の進展に伴い「情報化への対応」，論理的思考力の育成のため「平面幾何の重視」などの強い要請に応える必要があった。

さらに，進学率は95%を超えるようになったため，特に「すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減する」ことが求められた。

前回の改訂に続いて精選を進めたが，多くの要請を科目独立型を維持して継続するにはさらに科目を設定しなければならず，さらに多くの選択科目を履修しなければならないとすれば生徒の負担は増大することになる。

当然のことではあるが，「生徒の負担軽減を図る」こと「学力水準の維持を図る」ことは学校五日制への移行を意識しながら，改訂の重点目標とされていた。

このようなことから，科目統合型に戻し，一部の科目では項目を選択できるようにしている。

すべての生徒が履修する「数学Ⅰ」（4）に続いて「数学Ⅱ」（3）「数学Ⅲ」（3）をおき，原則として全内容を履修することとする。

一方，内容としては4単位分を用意するが，項目を選択して，概ね2単位分を履修する科目として「数学A」（2），「数学B」（2），「数学C」（2）をおいている。

（7）平成11年の改訂

完全学校週五日制への移行，総合的な学習の時間の確保などにより，「ゆとり」のなかで「生きる力」を培うことが求められた。

そのため，教科の時間は削減され，それを上回る内容を厳選することになった。これらの結果として，中学校の学習内容が大幅に高等学校に移されることになった。

縮小を迫るためにはやむなく取られる手法ではあろうが，今回の改訂においては教科の要望を入れないで枠組みを決定し，短時間の作業で仕上げざるをえないようなった。

さらに，「すべての生徒が履修する科目も選択できるようにし，それに2単位の科目を加える」ことを原則としている。

すべての生徒が履修する「数学基礎」（2）または「数学Ⅰ」（3）をおき「数学Ⅰ」に続いて「数学Ⅱ」（4），「数学Ⅲ」（3）をおいている。また，原則として，「数学A」（2）は全内容を履修することとし，「数学B」と「数学C」については2単位ではあるが，前回のように，内容としては4単位分を用意し，項目を選択して学習することとしている。

3．離散数学の位置付け

（1）変遷からみられる原則的な制約の積み上げ

7回の改訂を大きく3つにわけて考えることができよう。

第1期は，戦後の混乱期である。（1）昭和26年の改訂がこれに当たる。敗戦によるショックと混乱のなかで，実態にあうように，指導しやすい形をひたすら求めたものである。

第2期は，拡大期である。（2）昭和30年，（3）昭和35年，（4）昭和45年の改訂がこれに当たる。戦後の復興のための経済界からの要請，世界的な数学教育の現代化の潮流などを追い風にして，新しい学習内容を取り入れ，時代の変化にともなって，精選すべきは削減したが，トータルとしては，拡大することになっている。この期においては，大きな制約を課されることはなく，教科の要請は尊重されたので，数学科としては都合のよいものと考えるのは当然である。

第3期は，後退期である。（5）昭和53年，（6）平成元年，（7）平成11年の改訂がこれに当たる。この期にあっては，原則的な制約が教科の要請を超えたところで課されるようになる。

- 昭和53年の改訂では，　「4単位を超える科目は作らない」
- 平成元年の改訂では，　「すべての生徒が履修する科目については思い切って負担を軽減する」
- 平成 11 年の改訂では，　「すべての生徒が履修する科目についても選択できるようにし，それに2単位の科目を加える」

上のような原則的な制約は，それぞれの時点ではやむをえないものとして了承されたものといえようが，積み重なって適応してよいと考えることによって，規制緩和の流れと逆の事態を引き起こしているようである。

「規制緩和」を活性化の起爆剤としようするのであれば，検討しなければならない課題である。

例えば，今回の改訂において，「4単位を超える科目」については生かされているとみることができる。また，今回新に加わった「2単位で履修を終えられるように」も当然ではあるが，ほぼ生かされているとみることもでき，「数学基礎」をおくことになったのである。

ところで，「数学Ⅰ」を4単位から3単位に縮小したことについては，前回に課題となった「すべての生徒が履修する科目」を援用しているように考えられる。実質的には近いともいえようが，「数学基礎」を設定しているわけだから，「数学Ⅰ」はもはや「すべての生徒の履修する科目」ではないので，「思い切った負担軽減」はその必要がないともいえるのである。

いずれにしても，積み重ねられた制約については，検討し，大幅の規制緩和を図る必要がある。

（2）科目構成についての見通し

離散数学を独立した科目として導入するのであれば，他の内容についてもバランスを考えて科目独立型へ移行するのでなければなるまい。

しかしながら，科目独立型をとったのは，（1）の戦後の混乱期と（5）の現代化の批判を受けての緊急避難のときだけであり，（2），（3），（4），（6），（7）のいずれにあっても科目統合型をとっている。

これは，算術，代数，幾何，三角法とばらばらに扱っていた伝統的な中等教育の数学を批判して，ホワイトヘッドが「教育の目的」のなかで指摘しているように

「あまりに多くの科目を与えるな」

「教ゆべきことは徹底的に教えよ」

に取り組んできた成果であり，数学科としては大きな流れということができよう。

「Discrete Mathematics」を独立した科目のような形で紹介している事例も諸外国では多いようであるが，我が国の場合は，科目構成についての検討が積極的になされているわけではないので，現行の科目統合型のなかでそれを取り組むことを考えるのが現段階では適切といえよう。

（3）離散数学の取り組み

2で見てきたように，（5）昭和53年の改訂，（6）平成元年の改訂，（7）平成11年の改訂の3回にもわたり，変化の激しい時代にもかかわらず，高等学校の学習内容に情報化への対応を除けば大きな変化がないままに過ごしてきた。

これは，小・中学校を主体とした改訂を続けてきた結果であり，高等学校の活性化を阻んできたとも考えられ，世界的な潮流に取り残されるリスクも懸念される。

このようなことから，高等学校数学の学習内容を時代の変化に対応して改善することは必要であるといえよう。

その際に，数学の社会的な需要が増大してきていることを考え合わせると，数学が使える範囲を拡大しつつあることを示すことは学習意欲を喚起する上でも有効といえよう。

また，新しい内容を積極的に導入することによって，内容を充実し，微分・積分を頂点とする単頂型になりがちな高等学校数学を多頂型に変革するきっかけになれば，本来の趣旨が生かされることにもなる。

教材化を検討してきた項目について，現行の科目構成が継続すると仮定して，取り込んで位置付けることを考えよう。

現行のままでも可能であるともいえるのであるが，「数学基礎」の「（2）社会生活における数理的な考察」では，具体的で興味深い話題をとりあげることができよう。

「数学A」「（2）集合と論理」は，論理的な思考力の伸長を一層図ることをねらいとして新設されたのである。「鳩の巣原理」を活用して補強して学習し易く組み直すこともできるのではなかろうか。

「数学B」の「（3）統計とコンピュータ」は，中学校の内容を移したことから，内容が貧弱な段階にとどまっている。また，「（4）数値計算とコンピュータ」は，選択される機会が少ないことにもよるのであろうが，旧態依然の内容で魅力が感じられない。できれば，簡単な統計については中学校で扱うことにしたり，情報科との連携を図ったりして大幅に改訂する必要がある。

その際に，「グラフ理論」，「数え上げ，組合せ論」などを取り扱うことが効果的といえよう。

「数学C」の「（1）行列とその応用」では，一次変換のような扱いをしないこととしているなど課題を残している。イメージをつかみやすくするため，「グラフの行列による表現」などを取り上げることもできよう。

（本稿は、中間報告書の同名の論文の再掲載である。）

高等学校への離散数学の導入に関する諸外国の動向(中間報告書の要約)

離散数学に関するアメリカの研究動向
―NCTM の「スタンダード」ならびに「1991 年報」を中心に―

山口 武志 (福岡教育大学)

【要約】本稿の目的は, 離散数学に関するアメリカの研究動向について概観することにある。特に, 本稿では, NCTM の「スタンダード」と「1991 年報」を参照しながら, 離散数学を学校数学に導入するに至った史的経緯について概観した。それとともに, 離散数学を学校数学に導入することの意義について, 目的や内容という視座から検討した。アメリカでは, 1960 年代における離散数学の台頭とともに, 離散数学を学校数学のカリキュラムに位置づけようとする試みが徐々になされるようになった。その後, 1989 年に刊行された「スタンダード(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)」においては, 「内容」に関する 1 つの重要な「基準」として, 第 9 学年から第 12 学年のカリキュラムに離散数学が位置づけられることとなった。さらに, 2000 年に刊行された「スタンダード 2000(Principles and Standards for School Mathematics)」においても, 離散数学を強調する姿勢は基本的に受け継がれている。

アメリカの高等学校への離散数学の導入例―UCSMP―

二宮 裕之 (愛媛大学教育学部)

【要約】アメリカの高等学校への離散数学導入の事例として, 本節ではシカゴ大学学校数学プロジェクト (UCSMP) により刊行された高校 3 年生向け教科書『Precalculus and Discrete Mathematics (解析基礎と離散数学)』を紹介する。最初にプロジェクトの概要, 並びにこの教科書の目次全体を概観した上で, 特に離散数学と銘打った所以でもある単元「第 11 章 グラフと回路 (Graphs and Circuits)」について詳細に見ていきたい。単元の内容をそのまま把握できるよう, 必要と思われる例題などを交え, 元のテキストにある内容を漏れなく訳出した。

アメリカの高等学校への離散数学の導入例
―Pollak の考え, CPMP―

西村 圭一 (東京学芸大学附属大泉中学校)

【要約】学校数学における離散数学のあり方についての示唆を得るために, 第一に, 学校数学における数学的モデル化研究の第一人者である Henry O. Pollak の, 数学的モデル化と離散数学との関係に関する主張をまとめた。第二に, 米国の数学科カリキュラム開発プロジェクト Core-Plus Mathematics Project における離散数学の位置づけやその扱いについて分析した。その結果, 離散数学をカリキュラムに導入する価値や適切な問題に関して, 数学的モデル化の視点からの示唆を得るとともに, 離散数学の学習指導では抽象化やアルゴリズム開発の過程を大切にし, 教科書もそのように構成することが求められることがわかった。

アメリカの高等学校への離散数学の導入例－SIMMS－

高橋　広明（千葉県立松戸六実高等学校）

【要約】　本稿では，SIMMS カリキュラムに準拠した教科書の離散数学分野，特にグラフ理論に関わる内容を概観した。この教科書では，現実的な場面をもとに統合的に数学が扱われており，日本の教科書にはない特徴を持っている。またその中では考察すべき視点が明示されており，発問という観点からも示唆に富むものがある。

イギリスの高等学校における離散数学

長崎　栄三（国立教育政策研究所）

【要約】イギリスの高等学校においては，離散数学は，非理数系の「数学の利用」として扱われている。離散数学の主な内容は，アルゴリズム，グラフ理論，ネットワーク，マッチング，クリティカルパス分析，線形計画法，動的計画法，ゲーム理論である。この内容に即したある教科書は，それぞれのアルゴリズムや原理の詳しい説明や例で手順を理解し，それらの手順を問題によって身に付けていくようになっており，生徒が発見的にそれらを見出すという構成にはなっていない。

Ⅱ．日本の高等学校で指導する離散数学の指導目標・内容・用語の案

高等学校における「離散数学」の指導目標・内容・用語の案

本研究メンバーで，離散数学について，教育課程の記述を想定して，その科目，項目，目標，内容，用語・記号，内容の取扱い，を作成した。本稿では，それらをまとめた。

科目としては，必履修科目，選択科目の両者にわたり，さらに，現行の数学基礎，数学Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,A,B,Cにわたる。科目ごとのそれぞれの項目名は，次の通りである。

必履修科目

数学基礎：「社会生活における数理的な考察」，「離散数学」

数学Ⅰ　：「場合の数と確率」，「離散数学・統計」

選択科目

数学ⅡまたはⅢ：「離散数学・統計」

数学A：「集合と論理」，「離散グラフとその利用」

数学BまたはC：「離散グラフとその応用」，「離散グラフとその利用」，「グラフ表現とその利用」，「グラフ」，「グラフ表現」，「離散的なものの表現と論証」，「行列とその応用」。

それぞれの項目における主な離散数学の内容は，次の通りである。

必履修科目の「社会生活における数理的な考察」においては，離散グラフや鳩の巣原理など。

選択科目の「集合と論理」においては，鳩の巣原理，二値化など，「離散グラフとその応用」においては，離散グラフとそのアルゴリズムや応用などである。

以下では，それぞれの提案をまとめ，さらに，メンバーの意見を氏名の五十音順に挙げてある。

目　次

1．科目への配当案
2．必修科目の項目案
（1）数学基礎
（2）数学Ⅰ
3．選択科目の項目案
（1）集合と論理
（2）グラフ
（3）行列
（4）離散数学・統計（含む必修）

個人の提案（五十音順）
景山先生案，熊倉先生案，高橋先生案，津島先生案，中木先生案，西村先生案，萩原先生案，逸見先生案，室岡先生案，茂出木先生案，山口先生案，横澤先生案，吉田先生案

1．科目への配当案

表1　科目ごとの項目案

科目	項目案
数学基礎	社会生活における数理的な考察（景山），社会生活の数理的な考察（西村），離散数学（萩原），社会生活における数理的な考察（横澤），社会生活における数理的な考察（吉田）
数学Ⅰ	場合の数と確率（逸見），離散数学・統計（ⅠA）（室岡）
数学Ⅱ	離散数学・統計（ⅡB）（室岡）
数学Ⅲ	離散数学・統計（ⅢC）（室岡）
数学A	集合と論理（景山），集合と論理（集合と証明）（熊倉），集合と論理（津島），集合と論理（西村），集合と論理（萩原），集合と論理（茂出木），集合と論理（山口），離散グラフとその利用（横澤），集合と論理（横澤），集合と論理（吉田）
数学B	離散グラフとその応用（景山），グラフ表現とその利用（熊倉），離散的なものの表現と論証（高橋），グラフ（中木），グラフ表現（萩原），離散グラフとその利用（山口），グラフ表現（吉田）
数学C	グラフ表現とその利用（熊倉），行列とその応用（高橋），グラフ（中木），離散グラフとその利用（山口），行列とその応用（横澤），行列とその応用（吉田），

注：下線は重複

2．必修科目の内容案

（1）数学基礎

表2-1　数学基礎

数学基礎	社会生活における数理的な考察（景山）	社会生活の数理的な考察（西村）	離散数学（萩原）
目標	社会生活の場面や身近にある離散的な事象を，離散グラフ表示などを用いて数理的に考察したり，解決の手順を的確に表現したりすることを通して，数学的な見方や考え方を豊かにするとともに，数学の有用性を認識する。また，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。	社会生活の場面や身近にある離散的な事象を，図表示などを用いて数理的に考察したり，解決の手順を的確に表現したりすることを通して，数学的な見方や考え方を豊かにするとともに，数学の有用性を感得する。	グラフで表現することの意味を理解し，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，具体的な事象をグラフで表現し，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。
内容	ア．社会生活と数学 ｛｛従前の数学基礎の内容すべてを基本とする｝｝ イ．身近な事象の離散グラフ的考察 （ア）一筆書き （イ）ハミルトングラフ （ウ）マッチング（ホールの結婚定理） （エ）ネットワーク ウ．離散数理 ・可視性問題	ア．離散構造の視覚化 （ア）点－辺グラフ （イ）点－辺グラフと隣接行列 イ．点－辺グラフの利用とアルゴリズム化 （ア）点－辺グラフの彩色 （イ）最小全域木	ア．グラフ表現 （ア）一筆書き （イ）ハミルトン閉路 （ウ）彩色問題 （エ）最短経路問題 イ．論理的な考え方 （ア）二値化（偶奇性） （イ）鳩ノ巣原理 （ウ）日常語と論理

	・巡回セールスマン問題 ・パンケーキ問題 ・畳敷き問題 ・配線問題		
用語・記号	オイラーグラフ，ハミルトングラフ		
内容の取扱い		（1）アでは，オイラー路やハミルトン閉路などを扱う。また，隣接行列の和や積については，その解釈に重点を置くものとする。 （2）イでは，生徒が考えた手順を的確に表現することに重点を置き，既存のアルゴリズムには深入りしないものとする。	

表 2-2　数学基礎

数学基礎	社会生活における数理的な考察（横澤）	社会生活における数理的な考察 （吉田）
目標		（目標は現行のまま）
内容	ア．社会生活と数学 イ．身近な事象の数理的な考察 （ア）一筆書き （イ）ハミルトングラフ （ウ）ネットワーク ウ．日常と論理的な思考 （ア）二値化 （イ）鳩の巣原理 （ウ）必勝法	ア　社会生活と数学 ネットワーク，巡回セールスマン問題など イ　身近な事象の数理的な考察 一筆書き，オイラーの定理，ラムゼーゲームなど
用語・記号		
内容の取扱い		

（2）数学 I

表 3　数学 I

数学 I	場合の数と確率（逸見）
目標	
内容	ア　数え上げ 樹形図，グラフ，二値化，鳩ノ巣原理 イ　順列・組合せ （ア）順列 （イ）組合せ （ウ）最適化 ウ　確率 （ア）確率とその基本的な法則 （イ）独立な試行と確率 (ウ) 期待値
用語・記号	グラフ，o，—（グラフの記号），二値化，鳩の巣原理，nPr，nCr，階乗，n!，余事象，排反
内容の取扱い	・アなどに関連して，「数学 A」集合の要素の個数を数えるなどの内容を取り扱うものとする。ただし，簡単な場合にとどめるものとする。 ・関連して，集合に関する基本的な事項を取り扱うものとする。

3．選択科目の内容案

（1）集合と論理

表 4-1　集合と論理

数学A/B	集合と論理（景山）	集合と論理（集合と証明）（熊倉）	集合と論理（津島）
目標	事象を数学的に考察していく上での基礎となる集合や命題の考えを理解し，集合の要素の個数を数えたり，命題を言葉で論証したりするいろいろな方法を学ぶ活動を通して，論理的な思考力の伸長・コミュニケーション能力の向上に努め，実生活に活用できるようにする。このことを通して，数学に対する興味・関心を一層高める。	事象を数学的に考察していく上での基礎となる集合や命題の考えを理解し，集合の要素の個数を数えたり，命題を証明したりする活動を通して，論理的な思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。	図表示などを用いて集合についての基本的な事項を理解し，統合的に見ることの有用性を認識し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。また，命題を包括的にとらえることで，数学の有用性を味わう。
内容	ア．集合と要素の個数 （ア）集合の意味 （イ）集合の表現 （ウ）要素の個数 イ．数えあげの考え方 （ア）数えあげの原理 ・和の法則 ・積の法則 （イ）包除原理 （ウ）鳩の巣原理 ウ．いろいろな数えあげとその手法 ・順列（「数学 A」の“場合の数”から） ・組合せ ・二項係数と二項定理 ・再帰的関係　（「数学B」の数列から） ・母関数 エ．命題と証明 （ア）命題と条件 ・全称命題と存在命題 ・必要条件，十分条件，必要十分条件 （イ）いろいろな証明の方法 ・対偶法 ・背理法 ・数学的帰納法 ・二値化 ・分類，１対１，補集合 ・漸化式 ・反例	ア．集合と要素の個数 (ア)　集合の意味 (イ)　包除原理 イ．命題と証明 (ア)　命題 (イ)　いろいろな証明 ・鳩の巣原理による証明 ・対偶命題による証明 ・背理法による証明 ・その他の証明（畳の敷詰問題など）	ア．集合と要素の個数 イ．命題と証明 ・対偶 ・背理法 ・鳩の巣原理
用語・記号	集合，包除原理，鳩の巣原理，パリテイ，順列，組合せ，必要十分条件，命題，対偶，背理法，数学的帰納法，二値化，１対１対応	鳩の巣原理，対偶，背理法	
内容の取扱い			

表 4-2　集合と論理

数学A/B	集合と論理（西村）	集合と論理（萩原）	集合と論理（茂出木）
目標	図表示などを用いて集合についての基本的な事項や命題を証明する原理や方法を理解し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それを命題などの考察に生かすことができるようにする。	数学的な論証をする上で偶奇性や同値類に注目することの有用性や，鳩ノ巣原理のような存在命題について理解するとともに，数学的帰納法の構造について理解しそれらを具体的な事象の論証に活用できるようにする。	図表示などを用いて集合についての基本的な事項を理解し，統合的に見ることの有用性を認識し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。また，いろいろな証明方法を学び，論理的な思考力を伸ばしコミュニケーション能力の向上に努め，実生活に活用できるようにする。
内容	ア．集合と要素の個数 イ．命題と証明 （ア）鳩の巣原理 （イ）背理法	ア．集合と要素の個数 （ア）集合 （イ）　集合と要素の個数 イ．命題と証明 （ア）命題 （イ）いろいろな証明 ・対偶法 ・背理法 ・二値化（偶奇性） ・鳩ノ巣原理 ・数学的帰納法	ア　集合と要素の個数 イ　命題と証明 ア　命題 イ　いろいろな証明 ①背理法 ②帰納法 ③鳩ノ巣の原理を用いる方法
用語・記号		命題　否定　対偶　背理法　鳩ノ巣原理　帰納法	背理法　鳩ノ巣原理
内容の取扱い			

表 4-3　集合と論理

数学A/B	集合と論理（山口）	集合と論理（横澤）	離散的なものの表現と論証（高橋） （2）いろいろな論証
目標	集合や命題に関する基礎的な事項を理解するとともに，事象を多面的かつ統合的に見ることの有用性を認識したり，論理的な思考力を伸ばしたりしながら，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。		ものごとの原理や構造に着目して，言葉で論証する方法を理解させ，論理的に考える活動を通して的確に論証できるようにする。
内容	ア　集合と要素の個数 （ア）集合とその表現 （イ）包除の原理 イ　命題と証明 （ア）命題と条件 （イ）いろいろな証明 ［必要条件，十分条件，背理法，対偶命題による証明，鳩ノ巣原理による証明など］	ア　集合と要素の個数 （ア）集合の意味 （イ）包除原理 イ　命題と証明 （ア）命題 （イ）いろいろな証明 ・式と証明 ・鳩の巣原理による証明 ・反例による証明 ・対偶命題による証明 ・背理法による証明 ・数学的帰納法	ア．二値化して考える イ．鳩ノ巣原理を活用する ウ．1対1対応を活用する
用語・記号			二値化，鳩ノ巣原理，1対1対応
内容の取扱い			

表 4-4　集合と論理

数学A/B	集合と論理（吉田）
目標	（目標は，現行のまま）
内容	ア　集合と要素の個数 イ　命題と証明 ＊イについては，集合の包含関係と関連づけたり，要素と対応づけたりして理解できる程度のものにする。必要条件，十分条件，対偶，背理法，鳩ノ巣原理，2値化などを扱うものとする。
用語・記号	
内容の取扱い	

（2）グラフ

表 5-1　グラフ

数学A/B/C	離散グラフとその応用（景山）	離散グラフとその利用（横澤）	離散的なものの表現と論証（高橋） （1）グラフ表現
目標	離散構造に関する事象を数学化し処理する考えの理解を深めるとともに，グラフを用いた構造表現の有用性を認識し，それらをいろいろな事象の考察に生かすことができるようにする。このことを通して，数学的表現力や数学的思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。		いろいろな事象を点と線のグラフを用いて表現できることを理解させ，実際に表現する活動を通して問題解決にそれらを的確に活用する能力を伸ばすとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにする。
内容	ア．離散グラフの考えとその表現 （ア）一筆書きと離散グラフ ・関係のグラフ表現 ・オイラーグラフと一筆書き可能条件 （イ）いろいろな離散グラフ ・完全グラフ ・二部グラフ ・交グラフ（または，区間グラフ） ・平面グラフ ・ハミルトングラフ （ウ）離散グラフの行列表現 ・隣接行列の積の解釈 （エ）オイラーの定理 イ．離散グラフの利用とアルゴリズム （ア）ネットワーク問題	ア．離散グラフとその表現 （ア）一筆書きとグラフ ・関係をグラフに表す ・一筆書き可能な条件を考える （イ）いろいろなグラフ ・平面グラフ ・ハミルトングラフ ・完全グラフ イ．離散グラフの利用とアルゴリズム ・離散グラフの彩色 ・ネットワーク問題 ・マッチング問題 ・巡回セールスマン問題 ・全域最小木 ・最適化 ・ラムゼーゲーム ・オイラーの定理	ア．オイラー経路 イ．グラフの点彩色 ウ．最短経路 エ．最小全域木

	（イ）巡回セールスマン問題 （ウ）マッチング問題		
用語・記号	離散グラフ，辺，頂点，木，頂点の次数		グラフ，点，線，最小全域木
内容の取扱い			

表 5-2　グラフ

数学A/B/C	グラフ表現とその利用（熊倉）	グラフ表現（萩原）	離散グラフとその利用（山口）
目標	項目間の関係を表現する方法の1つとしてグラフがあることを知り，グラフを利用して身近な事象を考察することを通して，グラフ表現のよさを認識し，数学的表現力や数学的思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。	グラフで表現することの意味を理解し，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，具体的な事象をグラフで表現し，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。	離散構造に関する事象を数学化し処理する考えの理解を深めるとともに，その有用性を認識しながら，いろいろな事象の考察に生かすことができるようにする。
内容	ア．離散グラフとその表現 （ア）一筆書きと離散グラフ ・関係をグラフに表す ・一筆書き可能な条件を考える （イ）いろいろな離散グラフ ・平面グラフをかく ・ハミルトングラフをかく ・完全グラフをかくなど イ．離散グラフの利用 ・ネットワーク問題を考える ・マッチング問題を考える ・巡回セールスマン問題を考える ・オイラーの定理を考えるなど	ア．グラフ表現 （ア）頂点と辺 （イ）一筆書き イ．いろいろなグラフと応用 （ア）リーグ戦 （イ）ラムゼー定理 （ウ）最短経路	ア．離散グラフの考えとその表現 ［離散グラフの諸概念とその表現］ （例）グラフの隣接行列，オイラーグラフ（一筆書き），ハミルトングラフ，木グラフ］ イ　離散グラフの利用 ［（例）ネットワーク問題，オイラーの定理，最短経路問題など］
用語・記号	グラフ，辺，頂点	グラフ　辺　頂点　頂点の次数	離散グラフ
内容の取扱い			

表 5-3　グラフ

数学A/B/C	グラフ（中木）	グラフ表現（吉田）
目標	具体的な事象の考察などを通してグラフの考え方を理解し，離散構造の有用性を認識するとともに，事象を系統的に考察し処理できるようにする。	様々な離散的な事象を点と線を用いたグラフで表現できることを理解させ，それを利用することで，身近な現象を数学的に表現する能力や解決する能力を養う。
内容	ア　グラフ （ア）　グラフ表現 （イ）　いろいろなグラフ イ　グラフの応用 グラフの彩色，最短路 グラフと行列（行列が既習であれば。確率も使えれば，マルコフチェーンも）	ア　グラフ表現 一筆書き，オイラー閉路，オイラーグラフ，ハミルトン閉路，ハミルトングラフ，完全グラフ，木 イ　グラフの利用 塗り分け問題，ラムゼーゲーム，ネットワーク，巡回セールスマン問題，最適化，最小全域，

		オイラーの定理など
用語・記号	次数，完全グラフ，木，オイラー経路，ハミルトン経路，（隣接行列）	
内容の取扱い		

（3）行列

表6　行列

数学A/B/C	行列とその応用（高橋）	行列とその応用（横澤）	行列とその応用（吉田）
目標	行列の概念とその基本的な性質について理解し，数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，行列で表現することのよさを知り，グラフの考察や連立一次方程式を解くことや点の移動の考察などに活用できるようにする。		行列の概念とその基本的な性質について理解し，数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，連立一次方程式を解くこと，図形の移動や繰り返し起こる現象の考察などに活用できるようにする。
内容	ア．行列 （ア）行列とその演算 和，差，実数倍 （イ）行列の積と逆行列 イ．行列の応用 （ア）グラフ表現と行列表現 （イ）連立一次方程式 （ウ）点の移動	ア　行列 （ア）行列とその演算 和，差，実数倍 （イ）行列の積と逆行列 イ　行列の応用 （ア）離散グラフ表現と行列・路線経路問題 （イ）連立一次方程式 （ウ）点の移動	ア　行列 イ　行列の応用 （ア）　連立一次方程式 （イ）　図形の移動 （ウ）　マルコフ連鎖
用語・記号			
内容の取扱い			

（4）離散数学・統計（含む必修）

表7　離散数学・統計

数学Ⅰ/Ⅱ/Ⅲ/A/B/C	ⅠA：離散数学・統計（室岡）	ⅡB：離散数学・統計（室岡）	ⅢC：離散数学・統計（室岡）
目標	（1）集合と論理 集合の基本と形式論理を理解し，命題を考察できるようにする。 問題解決　個数の問題を集合でとらえて解決する。 表現 個数を n(A)等の記号で表す。 推論　集合の包含関係を用いて論理の証明をする。 （2）場合の数と確率 個数の数え方をもとに，順列・組合せ，確率を理解し，有用性を認識し事象を考察処理できるようにする。 問題解決　個数の数え上げの問題を解決する。 表現　n(A)等の記号を使って個数を表現する。 推論　ものの個数や起こりや	（1）数列 簡単な数列と数学的帰納法を理解し，事象を数学的に考察し処理できるようにする。 問題解決　数列の問題を適切に解決する。 表現　数列を一般項や漸化式で表現する。 推論　数列の一般項や数列の和を求める。 （2）アルゴリズム 整数，近似計算，グラフのアルゴリズムを理解しプログラミング言語などを用いて活用できるようにする。 問題解決　整数，近似解グラフなどの問題を適切なアルゴリズムで求める。 表現　整数，近似解，グラフ	（1）確率分布 確率の計算及び確率変数とその分布を理解し，不確定な事象を数学的に考察する能力を伸ばし活用できるようにする。 問題解決　条件付確率の問題を解決する。不確定な事象を確率分布で表して問題を解決する。 表現　不確定な事象を条件付確率や確率分布で表す。 推論　条件付き確率や確率分布をもとに不確定な事象の性質を推論する。 （2）統計処理 連続的な確率分布，統計的な推測を理解し統計的な見方や考え方を活用できるようにする。 問題解決　統計的方法で推

	すさを的確にする。	のアルゴリズムを適切に表現する。 推論　アルゴリズムの評価をする。	定や検定の問題を解決する。 表現　不確定な事象を正規分布等で表現する。 推論　標本の範囲を区間推定で判断する。帰無仮説の考え方で検定を行う。
内容	（1）集合と論理 ア　集合 イ　要素の個数 ウ　集合と論理 （2）場合の数と確率 ア　個数の数え方 イ　順列・組合せ ウ　確率とその基本的な法則 エ　独立な試行と確率と期待値	（1）数列 ア　数列とその和 (ア)等差数列・等比数列 (イ)いろいろな数列 イ　漸化式・数学的帰納法 (ア)漸化式と数列 (イ)数学的帰納法 （2）アルゴリズム ア　整数のアルゴリズム イ　近似計算のアルゴリズムとカオス ウ　グラフとアルゴリズム エ　アルゴリズムの評価	（1）確率分布 ア　条件つき確率 イ　確率変数と確率分布 ウ　二項分布 （2）統計処理 ア　連続型確率変数 イ　正規分布 ウ　母集団と標本 エ　統計的な推測・検定
用語・記号	（1）集合と論理 集合，要素，共通部分∩，和集合∪，□，□，φ，補集合 A，ﾄﾞ･ﾓﾙｶﾞﾝの法則，和の法則，同値，必要・十分条件 （2）場合の数と確率 集合の要素の個数 n(A)，階乗 n!，nPr，nCr，事象，空事象，余事象，排反	（2）アルゴリズム カオス，グラフ	（1）確率分布 条件付き確率，平均，分散，標準偏差，二項分布 （2）統計処理 正規分布，点推定，区間推定，帰無仮説
内容の取扱い			

個人の提案（五十音順）

景山案

1．「数学基礎」の内容

“社会生活における数理的な考察”

目標：社会生活の場面や身近にある離散的な事象を，離散グラフ表示などを用いて数理的に考察したり，解決の手順を的確に表現したりすることを通して，数学的な見方や考え方を豊かにするとともに，数学の有用性を認識する。また，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。

内容：

ア．社会生活と数学

｛｛従前の数学基礎の内容すべてを基本とする｝｝

イ．身近な事象の離散グラフ的考察

（ア）一筆書き

（イ）ハミルトングラフ

（ウ）マッチング（ホールの結婚定理）

（エ）ネットワーク

ウ．離散数理

・可視性問題

・巡回セールスマン問題

・パンケーキ問題

・畳敷き問題

・配線問題

用語・記号：オイラーグラフ，ハミルトングラフ

内容の取り扱い：

【コメント】この科目「数学基礎」は，高校３年間のサブテキスト的な位置づけ（？）とし，数学が如何に利用または応用されているかを中心に編集し，数学の有用性を示すものとする。この意味で，長尾さんが言われている「数学活用」という科目名でも納得します。無論，数学そのものの発展の経緯を知る上で，数学史的な内容も歓迎したい。

2．「数学 A」の内容

“集合と論理”

目標：事象を数学的に考察していく上での基礎となる集合や命題の考えを理解し，集合の要素の個数を数えたり，命題を言葉で論証したりするいろいろな方法を学ぶ活動を通して，論理的な思考力の伸長・コミュニケーション能力の向上に努め，実生活に活用できるようにする。このことを通して，数学に対する興味・関心を一層高める。

内容：

ア．集合と要素の個数

（ア）集合の意味

（イ）集合の表現

（ウ）要素の個数

イ．数えあげの考え方

（ア）数えあげの原理

・和の法則

・積の法則
(イ) 包除原理
(ウ) 鳩の巣原理

ウ. いろいろな数えあげとその手法
・順列　　(「数学A」の“場合の数”から)
・組合せ
・二項係数と二項定理
・再帰的関係　(「数学B」の数列から)
・母関数

エ. 命題と証明
(ア) 命題と条件
・全称命題と存在命題
・必要条件，十分条件，必要十分条件
(イ) いろいろな証明の方法
・対偶法
・背理法
・数学的帰納法
・二値化
・分類，1対1，補集合
・漸化式
・反例

用語・記号：集合，包除原理，鳩の巣原理，パリテイ，順列，組合せ，必要十分条件，命題，対偶，背理法，数学的帰納法，二値化，1対1対応

内容の取り扱い：

【コメント】上記“ウ.いろいろな数えあげとその手法”の中に，「不定方程式の解の個数」，「分割数」を入れたかったが，分量とその趣旨を考えて省略した。また，エ(イ)の中で，後半の4つの中には省略してもよいと考える項目もある。

3. 「数学B」の内容

(現在の(3)統計とコンピュータ，(4)数値計算とコンピュータ，の再構成による)

“離散グラフとその応用”

目標：離散構造に関する事象を数学化し処理する考えの理解を深めるとともに，グラフを用いた構造表現の有用性を認識し，それらをいろいろな事象の考察に生かすことができるようにする。このことを通して，数学的表現力や数学的思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。

内容：

ア. 離散グラフの考えとその表現
(ア) 一筆書きと離散グラフ
・関係のグラフ表現
・オイラーグラフと一筆書き可能条件
(イ) いろいろな離散グラフ
・完全グラフ
・二部グラフ
・交グラフ(または，区間グラフ)
・平面グラフ

・ハミルトングラフ
（ウ）離散グラフの行列表現
・隣接行列の積の解釈
（エ）オイラーの定理
イ．離散グラフの利用とアルゴリズム
（ア）ネットワーク問題
（イ）巡回セールスマン問題
（ウ）マッチング問題
用語・記号：離散グラフ，辺，頂点，木，頂点の次数
内容の取り扱い：
【コメント】グラフ理論への深入りは避ける。ここでは，事象の数学的な表現の一つとして，また思考の道具として，グラフも有用であることを理解させることを中心とする。

熊倉先生案

1．集合と論理（集合と証明）＜数学A＞選択

［目標］事象を数学的に考察していく上での基礎となる集合や命題の考えを理解し，集合の要素の個数を数えたり，命題を証明したりする活動を通して，論理的な思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。

［内容］

ア．集合と要素の個数
（ア） 集合の意味
（イ） 包除原理
イ．命題と証明
（ア） 命題
（イ） いろいろな証明
・鳩の巣原理による証明
・対偶命題による証明
・背理法による証明
・その他の証明（畳の敷詰問題など）

［用語・記号］鳩の巣原理，対偶，背理法

2．グラフ表現とその利用　＜数学B　または　数学C＞選択

［目標］項目間の関係を表現する方法の１つとしてグラフがあることを知り，グラフを利用して身近な事象を考察することを通して，グラフ表現のよさを認識し，数学的表現力や数学的思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。

［内容］

ア．離散グラフとその表現
（ア） 一筆書きと離散グラフ
・関係をグラフに表す
・一筆書き可能な条件を考える
（イ） いろいろな離散グラフ
・平面グラフをかく
・ハミルトングラフをかく

・完全グラフをかく　など

イ．離散グラフの利用

・ネットワーク問題を考える

・マッチング問題を考える

・巡回セールスマン問題を考える

・オイラーの定理を考える　など

［用語・記号］グラフ，辺，頂点

※　イについては，身近な事象や数学的に興味の持てるものを題材として，活動を通して考察することを主とし，定理などは極力扱わないものとする。

その他

①　数え上げの原理　→　数学Ａ：場合の数と確率

②　再帰的関係　→　数学Ｂ：数列

※　解けないような漸化式も扱う。（分割数　など）

③　行列表現　→　数学Ｃ：行列

※　上記とは別に，数学基礎の中の「社会生活における数理的な考察」に，離散数学の内容を集めたものを入れる。

３．社会生活における数理的な考察＜数学基礎＞必修

＜目標＞　社会生活において数学が活用されている場面や身近な事象を数理的に考察することを通して，数学の有用性などを知り，数学的な見方や考え方を豊かにする。（現行と同じ）

ア．社会生活と数学

イ．身近な事象の数理的考察

（離散数学に関わるものとして）

・一筆書き

・ハミルトングラフ

・ネットワーク　など

ウ．日常と論理的な思考

・鳩の巣原理

・背理法

・反例　　など

高橋案

１．単元名：離散的なものの表現と論証

有限で離散的な構造を扱うことを通して，豊かな発想と論理的な思考力を育成するとともに，自ら言葉で考え論証する態度を養う。

（１）グラフ表現

［目標］いろいろな事象を点と線のグラフを用いて表現できることを理解させ，実際に表現する活動を通して問題解決にそれらを的確に活用する能力を伸ばすとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにする。

［内容］

ア．オイラー経路

イ．グラフの点彩色
ウ．最短経路
エ．最小全域木
［用語・記号］グラフ，点，線，最小全域木
（2）いろいろな論証
［目標］ものごとの原理や構造に着目して，言葉で論証する方法を理解させ，論理的に考える活動を通して的確に論証できるようにする。
［内容］
ア．二値化して考える
イ．鳩ノ巣原理を活用する
ウ．1対1対応を活用する
［用語・記号］二値化，鳩ノ巣原理，1対1対応

単元については，現行の選択科目数学Bに相当する箇所に，オプションとして入れることがよいと考える。対象は文科系の生徒で数学をもう少し学びたいと考えているものを想定している。
グラフ理論の内容を盛り込もうとするとき，行列の指導内容にも影響を及ぼす。したがって数学Cの行列も改善していく必要があろう。

2．数学C
（1）行列とその応用
［目標］行列の概念とその基本的な性質について理解し，数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，行列で表現することのよさを知り，グラフの考察や連立一次方程式を解くことや点の移動の考察などに活用できるようにする。
［内容］
ア．行列
（ア）行列とその演算
和，差，実数倍
（イ）行列の積と逆行列
イ．行列の応用
（ア）グラフ表現と行列表現
（イ）連立一次方程式
（ウ）点の移動

津島案

1．集合と論理
［目標］図表示などを用いて集合についての基本的な事項を理解し，統合的に見ることの有用性を認識し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。また，命題を包括的にとらえることで，数学の有用性を味わう。
［内容］
ア．集合と要素の個数
イ．命題と証明
・対偶

・背理法
・鳩の巣原理

［コメント］
・数列を数学Aに復活させて，数学的帰納法とセットで学習させたい。
・数列を学習したときには数学的帰納法にはふれずに終了しておいて，数列の学習後すぐに集合と論理を学習し，命題のところで，鳩の巣原理を学習した際に数学的帰納法も学習してみてはどうか。
・鳩の巣原理の所で存在命題・全称命題ということも学習させてはどうか。
・包括的にという意味は，全称命題・存在命題があるというのを知る程度のもの。
・平均値の定理，中間値の定理を学習した際にもう一度命題について触れ，そこでパンケーキ問題等を扱ってもいいのではないか。
・グラフの導入に関しては，数理的な構造を見抜き，簡略化した図に表すという点では有用であるが，グラフそのものが学習の対象になると，離散数学のよさが発揮できないような気がする。

中木案

1．グラフ

具体的な事象の考察などを通してグラフの考え方を理解し，離散構造の有用性を認識するとともに，事象を系統的に考察し処理できるようにする。

ア　グラフ
(ア)　グラフ表現
(イ)　いろいろなグラフ
イ　グラフの応用
　グラフの彩色，最短路
　グラフと行列（行列が既習であれば。確率も使えれば，マルコフチェーンも）

［用語・記号］
次数，完全グラフ，木，オイラー経路，ハミルトン経路，（隣接行列）

コメント
- 鳩ノ巣や2値化などの考え方も入れるべきだと思われますが，今回はグラフ理論に限定しました。
- 単位数によっては，
　離散構造¥¥
　　具体的な事象の考察などを通して離散構造の考え方を理解し，数学的な見方を豊かにし，事象を系統的に考察し処理できるようにする。¥¥
　ア　鳩ノ巣原理
　イ　グラフ
　というのも検討しております。
- グラフの抽象的な定義から始める案もあろうかと思いますが，具体例からグラフを導入したいというのが現在の私の考えです。
- グラフ理論としての系統性より，日常的な事象との関連を重視したい。
- 本当は隣接行列をすれば面白いと思いますが，行列の定義や積を既習とできるかどうかという

点から，検討が必要と思われます。

西村案

高等学校で扱う離散数学の柱として，「鳩の巣原理」と「グラフ」を考え，それらを下のように別の単元に位置づけた。「グラフ」は高等学校の授業を変える契機になると考える。その際，「数学基礎」に位置づけた方が，私たちが期待するような授業が実現する可能性が高いと考える。一方，「鳩の巣原理」は数学Aに位置づけることで，多くの生徒に学ばせることが可能になる。

1．集合と論理　（数学A）

［目標］図表示などを用いて集合についての基本的な事項や命題を証明する原理や方法を理解し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それを命題などの考察に生かすことができるようにする。

［内容］

ア　集合と要素の個数

イ　命題と証明

（ア）鳩の巣原理

（イ）背理法

［用語・記号］なし

2．社会生活の数理的な考察　（数学基礎）

［目標］社会生活の場面や身近にある離散的な事象を，図表示などを用いて数理的に考察したり，解決の手順を的確に表現したりすることを通して，数学的な見方や考え方を豊かにするとともに，数学の有用性を感得する。

［内容］

ア　離散構造の視覚化

（ア）点ー辺グラフ

（イ）点ー辺グラフと隣接行列

イ　点ー辺グラフの利用とアルゴリズム化

（ア）点ー辺グラフの彩色

（イ）最小全域木

［用語・記号］なし

［内容の取扱い］

（1）アでは，オイラー路やハミルトン閉路などを扱う。また，隣接行列の和や積については，その解釈に重点を置くものとする。

（2）イでは，生徒が考えた手順を的確に表現することに重点を置き，既存のアルゴリズムには深入りしないものとする。

萩原案

1．集合と論理：科目　数学A(選択)

［目標］数学的な論証をする上で偶奇性や同値類に注目することの有用性や，鳩ノ巣原理のような

存在命題について理解するとともに，数学的帰納法の構造について理解しそれらを具体的な事象の論証に活用できるようにする。

［内容］

ア．集合と要素の個数

（ア）集合

（イ） 集合と要素の個数

イ．命題と証明

（ア）命題

（イ）いろいろな証明

・対偶法

・背理法

・二値化（偶奇性）

・鳩ノ巣原理

・数学的帰納法

［用語・記号］命題　否定　対偶　背理法　鳩ノ巣原理　帰納法

補足

・帰納法を数列ではなくここで扱うことでかなり「重い」単元となるが，これによって帰納法の構造を明確にできる。ここでは除外したパンケーキ問題のような中間値の定理の問題も入れられれば入れてみたいが，量を考え除外した。

・学習の順序として，対偶法・背理法を二値化・鳩ノ巣のあとにするかどうかは検討が必要であろう。

２．グラフ表現：科目　数学Ｂ（選択）

［目標］グラフで表現することの意味を理解し，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，具体的な事象をグラフで表現し，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。

［内容］

ア．グラフ表現

（ア）頂点と辺

（イ）一筆書き

イ．いろいろなグラフと応用

（ア）リーグ戦

（イ）ラムゼー定理

（ウ）最短経路

［用語・記号］グラフ　辺　頂点　頂点の次数

補足

・用語は極力少なくし，グラフ理論を学ぶというより，事象の数学的な表現手段として，または思考ツールとしてグラフが有用であることを重視する。

・グラフの応用としては何が適当かは検討し，精選する必要がある。

・論証で扱った背理法や鳩ノ巣を使って証明することも積極的に取り入れる。

３．離散数学：科目　数学基礎（選択必修）

［目標］グラフで表現することの意味を理解し，グラフを用いた考え方の有効性を認識するとともに，具体的な事象をグラフで表現し，課題の解決にグラフを活用することができるようにする。

［内容］
ア．グラフ表現
（ア）一筆書き
（イ）ハミルトン閉路
（ウ）彩色問題
（エ）最短経路問題
イ．論理的な考え方
（ア）二値化（偶奇性）
（イ）鳩ノ巣原理
（ウ）日常語と論理

補足
・離散数学という単元名は重い印象があり，数学基礎には向かないと思う。適当な単元名はないだろうか。
・日常語と論理では「否定命題」「対偶」「背理法」などを想定している。

全般の補足
（1）教科書記述について
従来の作り方だと，用語，定義，定理（公式），練習問題の流れになる可能性が高い。２通りの改善案を提案します。以下２例とも授業で生徒が考え発言出来るような配慮のうえでの提案です。
①詳細記述式
海外の教科書のように読んで分かるくらい詳しく述べたものにする。その代わりに授業では教科書の例以外のもので進める（その際，指導書等で教員をサポートする）。つまり，教科書で予習しても本当に理解しなければ応用できないような形を考える。逆に授業で理解不十分でも教科書を読むことで理解できるようにする。
②ワークノート形式
Ｂ５教科書では書き込みノート（ワークノート形式）形式にする。
（2）教員研修と必修
・教員にとってもなじみの薄い分野なので教員研修の機会を増やす。
・研修は労力の必要なことで，それを嫌って選択を避けるという可能性も考えられる。できれば数Ａとした「集合と論理」を数Ⅰに入れて必修とする。

逸見案

１．数学Ⅰ（４単位）

１　目標

２　内容

(1)　数と式

ア　数

整数，有理数，実数

イ　式

（ア）整式

（イ）等式と不等式

（平成元年「数学Ａ」より）

(2)　二次関数

ア　二次関数とグラフ

(ア) 関数とグラフ
(イ) 二次関数とそのグラフ
イ　二次関数の値の変化
(ア) 二次関数の最大・最小
(イ) 二次方程式と二次不等式

(3)　図形と計量

(4)　場合の数と確率

ア　数え上げ
樹形図，グラフ，二値化，鳩ノ巣原理
イ　順列・組合せ
(ア) 順列
(イ) 組合せ
(ウ) 最適化
ウ　確率
(ア) 確率とその基本的な法則
(イ) 独立な試行と確率
(ウ) 期待値

[用語・記号] グラフ，o，—（グラフの記号），二値化，鳩の巣原理，nPr，nCr，階乗，n!，余事象，排反

[内容の取扱い]
・内容の（4）のアなどに関連して，「数学A」集合の要素の個数を数えるなどの内容を取り扱うものとする。ただし，簡単な場合にとどめるものとする。
・内容の（4）などに関連して，集合に関する基本的な事項を取り扱うものとする。
・内容の（3）ウ　については，主として具体的な事象に関連付けて取り扱うものとする。
・内容の（3）ア，イ（ウ）については，他の離散数学の考え方の紹介を取り扱っても良い。

補足
以上のように，まず「場合の数と確率」を必修科目「数学Ⅰ」に戻した。そして離散の内容を，「場合の数と確率」の中に，その他の数え方，拡がり，という観点から追加した案である。
ここで，現在準必修科目「数学A」の内容である「集合と論理」の取り扱いを，「数学A」に置き，これを履修済みとして「場合の数と確率」を学習することができればよいと考える。

室岡案

1．数学ⅠAの「離散数学・統計」

（1）集合と論理
集合の基本と形式論理を理解し,命題を考察できるようにする。
問題解決　個数の問題を集合でとらえて解決する。
表現　個数をn(A)等の記号で表す。
推論　集合の包含関係を用いて論理の証明をする。

ア　集合
イ　要素の個数
ウ　集合と論理

[用語・記号] 集合，要素，共通部分∩，和集合∪，□，□，φ，補集合 A，ﾄﾞ･ﾓﾙｶﾞﾝの法則，和の法則，同値，必要・十分条件

（2）場合の数と確率

個数の数え方をもとに，順列・組合せ，確率を理解し，有用性を認識し事象を考察処理できるようにする。

問題解決　個数の数え上げの問題を解決する。

表現　n(A)等の記号を使って個数を表現する。

推論　ものの個数や起こりやすさを的確にする。

ア　個数の数え方

イ　順列・組合せ

ウ　確率とその基本的な法則

エ　独立な試行と確率と期待値

[用語・記号] 集合の要素の個数 n(A)，階乗 n!，nPr，nCr，事象，空事象，余事象，排反

2．数学ⅡBの「離散数学・統計」

（1）数列

簡単な数列と数学的帰納法を理解し,事象を数学的に考察し処理できるようにする。

問題解決　数列の問題を適切に解決する。

表現　数列を一般項や漸化式で表現する。

推論　数列の一般項や数列の和を求める。

ア　数列とその和

(ア)等差数列･等比数列

(イ)いろいろな数列

イ　漸化式･数学的帰納法

(ア)漸化式と数列

(イ)数学的帰納法

（2）アルゴリズム

整数，近似計算，グラフのアルゴリズムを理解しプログラミング言語などを用いて活用できるようにする。

問題解決　整数，近似解グラフなどの問題を適切なアルゴリズムで求める。

表現　整数，近似解，グラフのアルゴリズムを適切に表現する。

推論　アルゴリズムの評価をする。

ア　整数のアルゴリズム

イ　近似計算のアルゴリズムとカオス

ウ　グラフとアルゴリズム

エ　アルゴリズムの評価

[用語・記号] カオス，グラフ

3．数学ⅢCの「離散数学・統計」

（1）確率分布

確率の計算及び確率変数とその分布を理解し,不確定な事象を数学的に考察する能力を伸ばし活用できるようにする。

問題解決　条件付確率の問題を解決する。不確定な事象を確率分布で表して問題を解決する。

表現　不確定な事象を条件付確率や確率分布で表す。

推論　条件付き確率や確率分布をもとに不確定な事象の性質を推論する。

ア　条件つき確率

イ　確率変数と確率分布
ウ　二項分布
[用語・記号] 条件付き確率，平均，分散，標準偏差，二項分布
（2）統計処理
連続的な確率分布，統計的な推測を理解し統計的な見方や考え方を活用できるようにする。
問題解決　統計的方法で推定や検定の問題を解決する。
表現　不確定な事象を正規分布等で表現する。
推論　標本の範囲を区間推定で判断する。帰無仮説の考え方で検定を行う。
ア　連続型確率変数
イ　正規分布
ウ　母集団と標本
エ　統計的な推測・検定
[用語・記号] 正規分布，点推定，区間推定，帰無仮説

補足
①離散数学・統計(仮称)の領域を設ける。
②数学基礎の内容及び問題解決，表現，推論(仮称)に数学的活動を焦点化し，各領域に埋め込む。

茂出木案

1．集合と論理（数学A）
（2）集合と論理
[目標] 図表示などを用いて集合についての基本的な事項を理解し，統合的に見ることの有用性を認識し，論理的な思考力を伸ばすとともに，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。また，いろいろな証明方法を学び，論理的な思考力を伸ばしコミュニケーション能力の向上に努め，実生活に活用できるようにする。
[内容]
ア 集合と要素の個数
イ 命題と証明
　ア　命題
　イ　いろいろな証明
　　①背理法，②帰納法，③鳩ノ巣の原理を用いる方法
[用語・記号] 背理法　鳩ノ巣原理

コメント
・数学Aに追加するので選択教科になります。
・グラフ理論，離散構造，離散グラフなども考えましたが，難しすぎると考えました。
・それよりも現在生徒におけるコミュニケーション能力不足や言葉の足りなさなどを考え，証明を多く学習し，その克服が急務と考えました。
・言葉遊びとも思えるこの証明から，日本語の理解度が増し言葉を活用できる能力を養うことが出来ます。日本語力が深まることは，生活する上かつ人とコミニュケーションを取る上で多いに役に立つことになり，また，相手を納得させる説得力・インフォメーション能力・コミュニケーション能力の強化にもつながる。これは社会人になったときに，有利に働くと期待でき，

生きる力に通じていくと考えます。

例題

①１辺が２の正三角形の内部および辺上に，５つの点をとる。このとき，２点間の距離が１以下であるような２点が存在する。

②１から１９９９までの１０００個の奇数がある。この中から，５０１個の奇数をどのように選んでも必ず，その５０１個の中に，２つの相違なる数で，和が，２０００となるものが存在する。

③任意に与えられた相違なる４つの整数から適当に２つ選ぶと，その差は，３の倍数になる。

山口案

１．集合と論理（選択）　〔数学Ａ〕

［目標］集合や命題に関する基礎的な事項を理解するとともに，事象を多面的かつ統合的に見ることの有用性を認識したり，論理的な思考力を伸ばしたりしながら，それらを命題などの考察に生かすことができるようにする。

［内容］

ア　集合と要素の個数

（ア）集合とその表現

（イ）包除の原理

イ　命題と証明

（ア）命題と条件

（イ）いろいろな証明

［必要条件，十分条件，背理法，対偶命題による証明，鳩ノ巣原理による証明など］

２．離散グラフとその利用（選択）　〔数学Ｂあるいは数学Ｃ〕

［目標］離散構造に関する事象を数学化し処理する考えの理解を深めるとともに，その有用性を認識しながら，いろいろな事象の考察に生かすことができるようにする。

［内容］

ア　離散グラフの考えとその表現

［離散グラフの諸概念とその表現］

（例）グラフの隣接行列，オイラーグラフ（一筆書き），ハミルトングラフ，木グラフ］

イ　離散グラフの利用

［（例）ネットワーク問題，オイラーの定理，最短経路問題など］

〔用語・記号〕離散グラフ

横澤案

主旨

（１）「離散数学（離散グラフと鳩の巣）」を数学Ａに配置しました。数学Ａは原則として内容のすべてを履修させる選択科目であり，離散数学をより多くの生徒に学んでほしいと考えました。

（２）「いろいろな数え上げと確率」を数学Ａから数学Ⅰへ移行しました。数学Ⅰはすべての生徒

が数学基礎とのいずれか１科目選択して履修するものであり，すべての生徒に必要な社会的素養と考えました。
（３）「方程式と不等式」を数学Ⅰから数学Aへ移行しました。数学Aのボリュームを減らすことと「二次不等式」等の履修時期を学校ごとに調整しやすくしたいと考えました。
（４）数学Cの行列に再び「離散グラフ」が登場し，行列の積の意味理解と離散グラフの有用性が認識されることを期待しました。
（５）数学基礎（数学探究）でも「身近な事象の数理的考察」の事例の中で「離散数学（離散グラフと鳩の巣）」をより多く取り入れることが有効であろうと考えました。
（６）平面図形を数学Aから数学Bへ移行しました。数学Aのボリュームを減らすことと「平面図形」を「ベクトル」と結びつけて扱うことを期待しました。

１．第１　数学基礎（数学探究）

［目標］

［内容］

（１）数学と人間の活動

ア　数と人間

イ　図形と人間

（２）社会生活における数理的な考察

ア　社会生活と数学

イ　身近な事象の数理的な考察

（ア）一筆書き

（イ）ハミルトングラフ

（ウ）ネットワーク

ウ　日常と論理的な思考

（ア）二値化

（イ）鳩の巣原理

（ウ）必勝法

（３）身近な統計

ア　資料の整理

イ　資料の傾向の把握

２．第２　数学Ⅰ

［目標］

［内容］

（１）二次関数

（２）図形と計算

（３）いろいろな数え上げと確率

ア　順列・組合せ

イ　確率とその基本的な法則

ウ　独立な試行と確率

エ　期待値

３．第３　数学Ⅱ

［目標］

［内容］

（1）整式・高次方程式
ア　整式
（ア）整式の除法，分数式
イ　高次方程式
（ア）複素数と二次方程式
（イ）高次方程式
（2）図形と方程式
（3）いろいろな関数
（4）微分・積分の考え

4．第4　数学Ⅲ

［目標］
［内容］

5．第5　数学A

［目標］
［内容］
（1）方程式と不等式
ア　数と式
（ア）実数
（イ）式の展開と因数分解
（2）離散グラフとその利用
ア　離散グラフとその表現
（ア）一筆書きとグラフ
・関係をグラフに表す
・一筆書き可能な条件を考える
（イ）いろいろなグラフ
・平面グラフ
・ハミルトングラフ
・完全グラフ
イ　離散グラフの利用とアルゴリズム
・離散グラフの彩色
・ネットワーク問題
・マッチング問題
・巡回セールスマン問題
・全域最小木
・最適化
・ラムゼーゲーム
・オイラーの定理
（3）集合と論理
ア　集合と要素の個数
（ア）集合の意味
（イ）包除原理
イ　命題と証明

（ア）命題
（イ）いろいろな証明
・式と証明
・鳩の巣原理による証明
・反例による証明
・対偶命題による証明
・背理法による証明
・数学的帰納法
（3）いろいろな数え上げと確率

6．第6　数学B

[目標]
[内容]
（1）数列
ア　数列とその内容
（ア）等差数列と等比数列
（イ）いろいろな数列
イ　漸化式と数学的帰納法
（ア）漸化式と数列
（2）ベクトル
（3）平面図形
（4）統計とコンピュータ

7．第7　数学C

[目標]
[内容]
（1）行列とその応用
ア　行列
（ア）行列とその演算
和，差，実数倍
（イ）行列の積と逆行列
イ　行列の応用
（ア）離散グラフ表現と行列
・路線経路問題
（イ）連立一次方程式
（ウ）点の移動

吉田案

1．数学A（選択科目）

（1）集合と論理
[目標]（目標は，現行のまま）
[内容]
ア　集合と要素の個数
イ　命題と証明

＊イについては，集合の包含関係と関連づけたり，要素と対応づけたりして理解できる程度のものにする。必要条件，十分条件，対偶，背理法，鳩ノ巣原理，２値化などを扱うものとする。

２．数学Ｂ（選択科目）

数列，ベクトル，統計又はグラフ表現について考察させ，基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り，事象を数学的に考察し処理する。（数値計算を削除）

（４）グラフ表現

［目標］様々な離散的な事象を点と線を用いたグラフで表現できることを理解させ，それを利用することで，身近な現象を数学的に表現する能力や解決する能力を養う。

［内容］

ア　グラフ表現

一筆書き，オイラー閉路，オイラーグラフ，ハミルトン閉路，ハミルトングラフ，完全グラフ，木

イ　グラフの利用

塗り分け問題，ラムゼーゲーム，ネットワーク，巡回セールスマン問題，最適化，最小全域，オイラーの定理など

３．数学Ｃ（選択）

（１）行列とその応用

［目標］行列の概念とその基本的な性質について理解し，数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに，連立一次方程式を解くこと，図形の移動や繰り返し起こる現象の考察などに活用できるようにする。

［内容］

ア　行列

イ　行列の応用

（ア）　連立一次方程式

（イ）　図形の移動

（ウ）　マルコフ連鎖

＊媒介変数で表される曲線の部分は，数学Ⅲへ移行する。

４．数学基礎（選択必修）

（２）　社会生活における数理的な考察

［目標］目標は現行のまま

［内容］

ア　社会生活と数学

ネットワーク，巡回セールスマン問題など

イ　身近な事象の数理的な考察

一筆書き，オイラーの定理，ラムゼーゲームなど

＊内容の取り扱いは現行のまま

Ⅲ. 授業研究を通した離散数学の授業とその評価

高等学校等における離散数学についての実験授業

本研究における，2年間の研究授業の主題，対象学年，実施年月は，次の通りである。

平成17年度

実施年月日	担当者	標題	実施学年
2005年10月	高橋広明	活動を中心とした離散教材の開発 －再帰的思考の活用とアルゴリズムの構成－	高等学校普通科1年
2005年10月～11月	津島久美	離散的なものの見方・考え方の重要性 －鳩の巣原理による単元の構成－	高等学校普通科3年
2005年11月	横澤克彦	「グラフ理論」の単元による指導 －活動や議論を中心とした授業への転換を目指して－	高等学校電気科3年
2005年11月～2006年1月	西村圭一	「グラフ」の学習指導に関する研究 －自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当てて－	中学校2年生選択数学
2005年12月	萩原季弘	ラムゼー定理を主題とした授業 －ラムゼー定理のゲーム化によって－	高等学校理数科2年

平成18年度

実施年月日	担当者	標題	実施学年
2006年8月	萩原季弘	離散数学で論証を学ぶ	高等学校理数科1年
2006年12月	横澤克彦	離散グラフの高等学校への導入にともなう評価の研究－グループ学習による問題づくりを通して－	高等学校食物栄養科1年
2006年12月	津島久美	鳩の巣原理の考え方を活用し，問題を解く （数学Ⅱ研究）	高等学校普通科2年
2006年12月	茂出木祥高	鳩の巣原理の考え方 簡単な日常の例から数学の問題へ	高等学校商業科1年
2007年1月	西村圭一	離散グラフ －教科書記述例を用いて－	中学校2年生選択数学
2007年2月	逸見由紀子	離散グラフ（数学B）の教科書記述例	高等学校高校2年

離散的なものの見方・考え方の重要性

～鳩の巣原理の授業における評価方法について～

津島　久美
岡山県立高梁高等学校

【要約】普通科２年生の文系の生徒を対象に２回の『鳩の巣原理』の授業を行った．第１時はグループ学習，第２時は個人学習という形式をとった．評価はワークシートをもとに行い，授業アンケートも合わせて行った．また今回の授業は，一般の高校数学教員が行った．今回の授業から，離散数学教材の授業に関して，自分の考察をもとにグループ学習をすることが非常に効果的であるとわかった．第１時と第２時における生徒の輝き具合は比べものにならなかった．これは，授業で扱う問題の難易差ではなく，授業の形態によるものであることがアンケート結果からもわかる．評価方法においては，ワークシートによる方法をとったが，有効な方法を考える必要がある．

１．題材について

鳩の巣原理は，存在命題を証明するときにその効力を発揮する．鳩の巣原理の定義は，ディリクレの部屋割り論法とも言われ，それぞれの定義は次の通りである．

《鳩の巣原理》

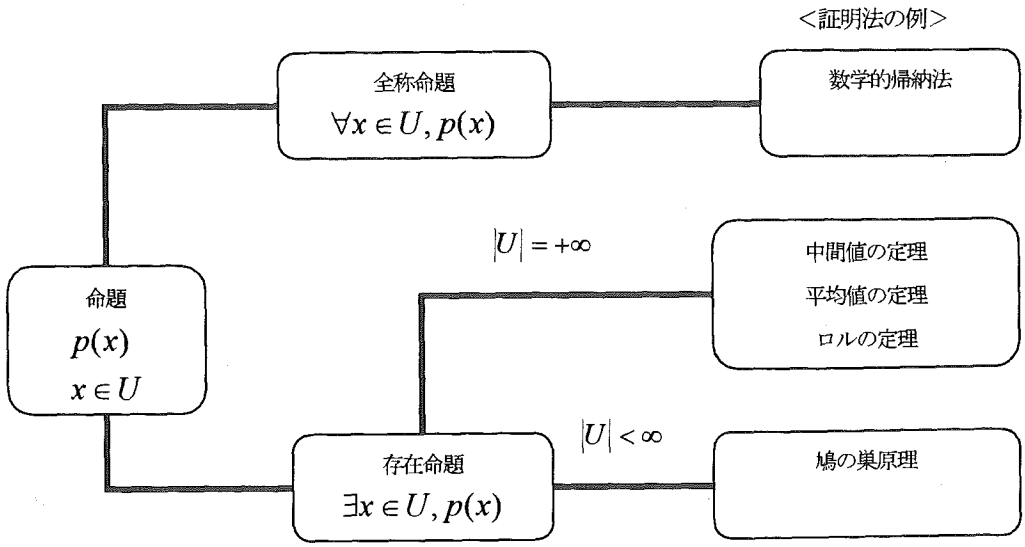
$p+q-1$羽の鳩が２つの巣を共有しているとする．すると，少なくとも１つの巣はp羽の鳩がいるか，もう１つの巣にはq羽の鳩がいる．

《ディリクレの部屋割り論法》

$nk+1$人をn室の部屋に入れたとき，少なくとも１つの部屋は$k+1$人以上の人が入ることになる．

鳩の巣原理は，有限集合の存在命題を証明するとき使われる．命題（真か偽かが判断できる文章）の分類とその証明方法を図式化すると，図１の通りである．

図１　数学における命題と証明方法



それぞれについての説明は次の通りである.

《全称命題》

$\forall x \in U, p(x) \cdots (*)$

全体集合Uが自然数全体などのとき，すなわち変数xが自然数のとき，(*) は自然数を変数とする命題群を意味する.

(*) を場合分けして証明しようとすると一般に無数の場合があり，それらすべてを１つずつ証明していくことはできない．ここで，用いる強力な武器が数学的帰納法である.

《存在命題》

$\exists x \in U, p(x) \cdots (**)$

全体集合Uが有限集合のときと無限集合のときとでは (**) の証明法は大きく異なる.

$|U| = +\infty$のとき，例としては中間値の定理，平均値の定理.

$|U| < \infty$のとき，例としては鳩の巣原理.

２．単元観

現代社会は情報社会である．コンピュータの発展により，離散数学的な考え方は必要不可欠なものである．そのことを少しでも感じさせることができればと思う．また，私たちの身の回りには数学の恩恵を受けているものがたくさんあるということを伝えることで，数学の有用性を少しでも実感させたい．そして，普段学習することのない離散数学を学習することで，数学に対する興味・関心が増し，他の数学の分野も頑張って取り組んでくれるようになってくれれば幸いである.

３．授業の記録

（１）日時

この研究の授業は鳩の巣原理とそれを使った問題解決について２時間で行った．授業は，平成１８年１２月に２回にわたって行った.

第１時：平成１８年１２月１１日（月）　鳩の巣原理を導きだす

第２時：平成１８年１２月１８日（月）　鳩の巣原理の考え方を活用して問題を解く

（２）対象生徒

２年４組数学Ⅱ探求選択者２１名（女子２１名）

（３）生徒観

本校は普通科４クラス，家政科１クラスからなる，県内屈指の伝統校である．３年前から単位制を導入し多様な進路に対応している．２年４組数Ⅱ探求選択者は文系の生徒である．数学に対する意欲は必ずしも高くなく，自分で問題を解決しようとする意欲があまり見られず，授業態度は受け身になることが多い．しかし，性格的には素直で素朴な生徒が多く，授業は和やかな雰囲気で進めることができる.

（4）授業の展開

表２　第１時の学習指導案

<table>
<tr><td colspan="3">数学科学習指導案
岡山県立高梁高等学校　普通科　2年4組21名（女子21名）
平成18年12月11日（月）　第6限　（14:10　～14:55）
使用教室　2－4教室　　指導者　佐伯　泰臣</td></tr>
<tr><td colspan="3">本時案（計画　第1時）</td></tr>
<tr><td colspan="2">学習目標</td><td>鳩の巣原理を導き出す</td></tr>
<tr><td colspan="2">指導のねらい</td><td></td><td>指導上の留意点・[評価]</td></tr>
<tr><td>導入（5分）</td><td>挨拶
出欠の確認

アンケートを記入する</td><td></td><td>アンケートに真剣に取り組んでいるか[興味・関心]</td></tr>
<tr><td rowspan="8">展開（35分）</td><td>問題提示をする</td><td>T高校の人数は約600人です。T高校生の中には，誕生日が同じ人がいるでしょうか？？</td><td></td></tr>
<tr><td>自分の考えをお互い議論する</td><td>鳩が4羽いて，鳩の巣が3個ある。
鳩は必ず鳩の巣に入るとしたら，どのような現象が起こるだろうか？？
・3人組のグループを作り，グループ内で議論させる
・グループごとの考えを発表させる
・各グループの考えをまとめる</td><td>・どういう場面が考えられるか，1つ1つあげさせる</td></tr>
<tr><td></td><td>2羽以上存在する鳩の巣が少なくとも1つ存在する</td><td>・少なくともという表現に注意する</td></tr>
<tr><td></td><td>・鳩の巣原理の考え方が理解できているかどうかの確認問題を解かせる</td><td>・グループでさせる</td></tr>
<tr><td>確認問題を解く</td><td>T高校の人数は約600人です。T高校生の中には，誕生日が同じ人がいるでしょうか？？</td><td>・問題が解けているか，鳩の巣原理の考えをどこに適用すればよいか理解しているか
・論理的に筋道の通った証明ができているか
[数学的見方・考え方]
[表現・処理]</td></tr>
<tr><td></td><td>・答え合わせをする
・どういう状況のときに鳩の巣原理が適用できるかを答えさせる</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">まとめ（5分）</td><td>本時の学習内容をふりかえる

挨拶</td><td>・本時の学習内容を確認させる</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">準備物</td><td>プリント，アンケート用紙</td></tr>
</table>

表３　第１時の授業プリント

みんなで楽しく考えよう♪

（　　）組　（　　）番　名前（　　）

① 正解しないといけない，とか，間違ってはいけない，とかはありません。考えることが大切。自分の頭の中に浮かんだことを全部書いておこう。（図・グラフなども OK！）人と違っていても OK！とにかく，書こう。

１高校の人数は約６００人です。１高校生の中には，誕生日が同じ人がいるでしょうか？

【あなたの予想】（なぜ，そう考えたのか，理由も書いてください）

NO.1　【あなたが考えたこと】

鳩が４羽いて、鳩の巣が３個ある。鳩はみな巣に入るとしたら、どのような現ころだろうか？

【グループでまとまった意見】

【次に最初の問題について考えてみよう】

【今日の感想をどうぞ】

表４　第２時の学習指導案

<table>
<tr><td colspan="4">数学科学習指導案
岡山県立高梁高等学校　普通科　2年4組21名（女子21名）
平成18年12月18日（月）　第6限　（14:10～14:55）
使用教室　2－4教室　　指導者　佐伯　泰臣</td></tr>
<tr><td colspan="4">本時案（計画　第2時）</td></tr>
<tr><td colspan="2">学習目標</td><td colspan="2">鳩の巣原理の考え方を活用し、問題を解くことができる[表現・処理]</td></tr>
<tr><td colspan="2">指導のねらい</td><td>指導過程・学習活動</td><td>指導上の留意点・[評価]</td></tr>
<tr><td>導入（５分）</td><td>挨拶
出欠の確認
前時の復習</td><td>・前時の復習として以下の問題を解かせる
5人グループの中には，同じ血液型の人がいるといえますか？？ただし，5人とも血液型がわかっているものとします。</td><td>・生徒に自由に発言させる</td></tr>
<tr><td rowspan="2">展開（３５分）</td><td>評価問題を解く</td><td>・練習問題を解かせる
T市の人口は約4万人です。人間の髪の毛は3万本以下であるとすると，T市民の中には，同じ髪の毛の本数の人がいるでしょうか？？
・評価問題をさせる
1辺が10cmの正方形の形をした花壇があります。その花壇に5本のチューリップを植えます。どんな植え方をしても，そのうちの2本の距離が5√2以下となるような2本は存在するでしょうか？？</td><td>・自由に発言させ，その内容を共有する
・自分の思考過程が説明できるよう指示する
・何が鳩で何が巣に対応しているかを考えるように促す
・巣の数がどれくらいになればいいのか考えさせる</td></tr>
<tr><td>解説を聞く</td><td>・解説をする
・早く解けている生徒に対しては，発展問題を解かせる
1辺が20cmの正方形の形をしたケーキがあります。その上には9個のイチゴがのっています。イチゴをどのようにおいても，その中のイチゴ3つで囲まれる部分の面積が50?以下となるようなイチゴ3つは存在するでしょうか</td><td>・どこに鳩の巣原理が使われているか尋ねる</td></tr>
<tr><td>まとめ（５分）</td><td>アンケートを記入する
挨拶</td><td>・アンケートをとる
・アンケートを回収する</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">準備物</td><td colspan="2">プリント，アンケート用紙</td></tr>
</table>

表５　第２時の授業プリント

今日は一人で楽しく考えよう♪

NC.2

（　　）組　（　　）番　名前（　　）

前回の考え方を使って以下の問題を解いてみよう

T君の人口は何万人です．人間誰の年齢も百年以下であるとすると，T君の年に生まれた同じ誕生日の人は何人でしょう？？

今日に１人で以下の問題に挑戦しよう

１辺が10cmの正方形の紙をした場合があります．その場合に５本のチューリップを貼ります．どんな貼り方をしても，そのうちの２本の距離が5√2cm以下となるような２本があるでしょう？？

ヒント：鳩に対応しているもの…（　　），巣に対応しているもの…（　　）

巣の数は（　　）以下にならないといけない。

よくできた人は，以下の問題にもチャレンジしてみよう！！

１辺が20cmの正方形の紙をしたケーキがあります．どの上に好きの仕方で１辺が１cmのイチゴを置いていきます．イチゴをどのように置いても，その中のイチゴ２つで置かれる場合の距離が5cm以下となるようなイチゴを置くことができるでしょうか？？

【今日の感想をどうぞ】

（5）第2時　授業後の研究協議

平成18年12月18日（月）15：05～15：50　於：応接室

参加者　長尾篤志（国立教育政策研究所研究開発部）
景山三平（広島大学大学院教育学研究科教授）
後藤文夫（岡山県立高梁高等学校校長）
桶上　潔（岡山県立高梁高等学校教頭）
小網晴男（岡山県立高梁高等学校教諭）
植田修司（岡山県立高梁高等学校教諭）
林　良親（岡山県立高梁高等学校教諭）
佐伯泰臣（岡山県立高梁高等学校教諭：4組担当，授業者）
勝田信宏（岡山県立高梁高等学校教諭：2・3・5組担当）
津島久美（岡山県立高梁高等学校教諭）

①授業者の感想

授業を展開するのが難しかった．何が鳩に対応し，何が巣に対応しているかの確認は生徒達にとって，前回の授業の問題の方がスッキリしているようだった．ケーキの問題では，4つにわけるという発想がでなかった．うまく気づかせたかったが，できなかった．生徒の意見をもっとだしたかったが，今回はグループではなく，個人での参加形式だったので，出にくかったように思う．グループの方が意見は出やすいと感じた．「存在する」，「少なくとも」という言葉の扱いが難しいと感じた．評価が今回は焦点の1つということだが，班での評価にしてはどうだろうか．生徒にとっては，発言もできるし，考えようとする姿勢が現れるようになる．離散数学に初めて触れた自分にとっては，やりにくい授業であった．

②意見交換

A：クラスによってけっこう差が大きかった．クラスの雰囲気によって発言の差があった．普段の授業の方が目標は明確なだけに，やりやすいこともある．こういった離散数学の授業は時間が余ったときにするとか，コラム的なものならいいと思う．

B：グループ学習の方が発言はでていた．個人での授業ではアイデアが出にくい．

C：「少なくとも1つ」というのはとても生徒にとっては難しい言葉だと思う．花壇やケーキの問題での分割については，連続した領域を分割するということにすごくギャップがあると思った．私は1年生を担当しているが，1年生だと，1割くらいの生徒しかできないのではないだろうか．

D：私は数学が専門ではないので，内容についてはよく分からないが，生徒の「わかった！」「へぇ！」「ほぉ！」という声が聞けて良かった．何が鳩に対応し，何が巣に対応するのかをおさえさせることが重要だと思った．ものの見方・考え方に広がりのある教材ではないか．

E：数学の授業も楽しくなければいけない．髪の毛の問題から花壇の問題への難易度の格差があった．発想が浮かんだ生徒はすごいと思う．こういう授業が導入され，発想の豊かな生徒が増えれば，数学も楽しくなるのではないか．

F：普段の数学の授業に関してお尋ねします．前回の授業から1週間の期間があいていますが，数学に関しては何を学習していましたか？（ベクトル，対数です）授業の形式は今日の授業と同じような感じですか？（いいえ．講義形式なのでやり方は異なります）発言に関しては？（講義形式なので生徒からの発言は少ないです．生徒を指名すれば，答えてくれます）今日は，発言の状況を設定すれば，指名しなくても発言があるし，見ていて楽しい授業でした．最後の2つの問題は難しいと思うが，佐伯先生の授業の展開の仕方はうまかったです．区切りを入れるという発想は，試行錯誤がないと生まれません．今日は，問題を解説するところまで行きましたが，授業者がしゃべりすぎず，

ある程度生徒をほって終了しておいて，次時にまわしておいてもよかったのではないか．また，４つに区切ることに関して，等分するというのが理解できていない生徒がいた．また，イチゴが１直線上に並ぶのはいいのかどうか，という質問がでてきてもよかったと思うし，そのことに関してもおさえて欲しかった．鳩の巣原理の教材はこちらが説明してしまうとおもしろくない．見方・考え方を議論から引き出すことが重要．ディスカッションの中で自分の考えを固めることも必要．ディスカッションは社会人になってからも必要なことであるので，生徒にとっては貴重な経験になったことと思う．今回の授業は，将来鳩の巣原理が導入されたときのすばらしい，理想の形の授業を見ることができた．

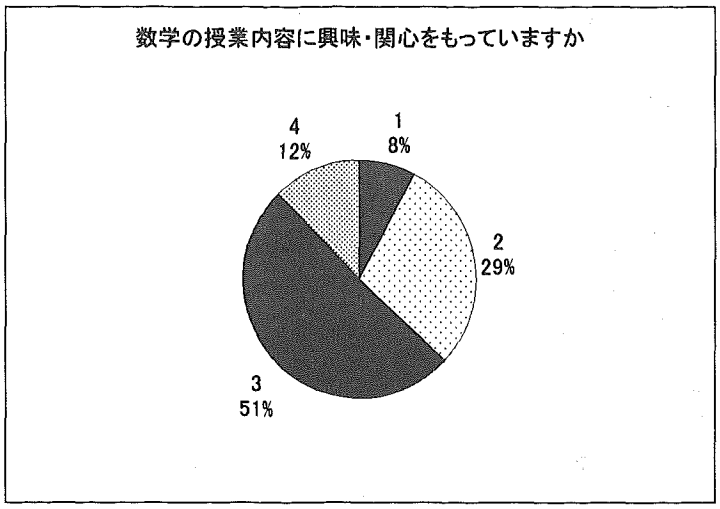
G：鳩の巣原理の一般の形をおさえておくべきだった．ケーキの問題の，「余った１つが区切った領域のどこかに入る」という考えは，試行を理解させるのが大切である．今日の授業で気になったのは，「難しい」という語を教師が使っていたこと。ネガティブな言葉は試行を縮めることになるので，あまり使いたくない．今日の問題で，巣に対応するものが離散量から連続量に変わる問題では，展開が非常に難しい．区切りを入れることで，巣を連続量から離散量に変える発想を今日は，教師がしゃべりすぎてしまった．授業の形態に関しては，グループ学習にするのがよい．個人で学習するのは，All or nothing になりやすいので難しい．離散数学教材を取り入れた授業がめざすのは，「生徒が思考をどのようにしたか」ということである．思考がすばらしいものであれば，部分点をたくさんあげればいい．知識ではなく，知恵を身につけさせるべきである．離散数学が高校数学に導入されたら，教師がじっとこらえて，生徒の発言をひきだすことが重要である．離散数学を今，学校で数学が苦手な子に学習させて，感性を磨いて欲しい．

４．アンケート結果の分析

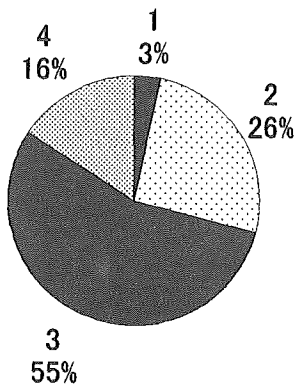
アンケートは第１時間目の最初に「授業前アンケート」，第２時間目の最後に「２回の授業を通して」と題しアンケートをとった．それぞれの結果をまとめると，表６，７の通りである．その中から特に強調したい点について述べる．

表６　授業前アンケート

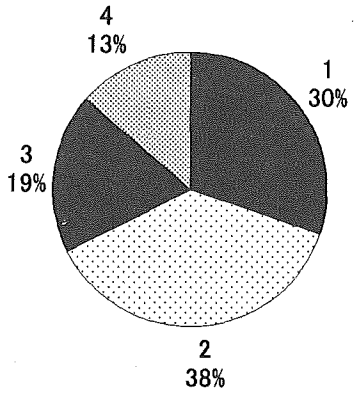
（１：そう思わない，２：どちらかといえばそう思わない，３：どちらかといえばそう思う，４：そう思う）



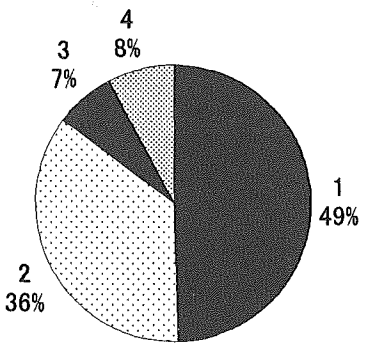
あなたは授業に積極的に参加していますか



あなたは数学が好きですか



あなたは数学が得意ですか



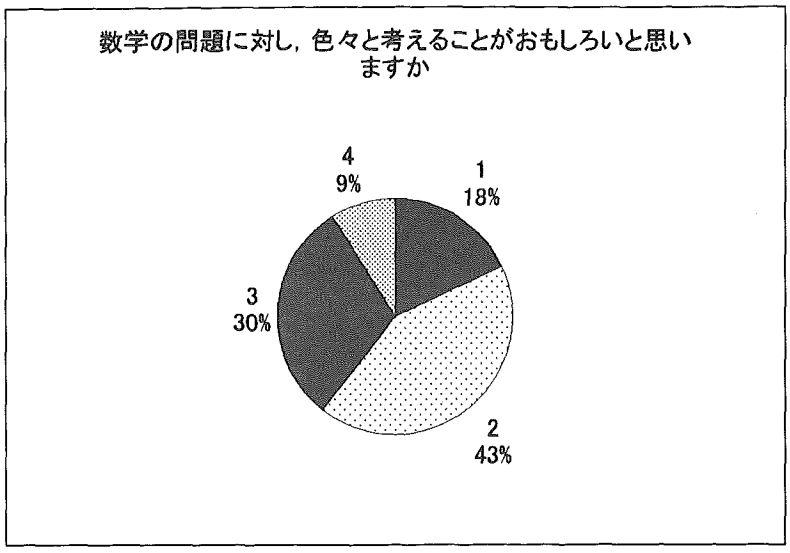
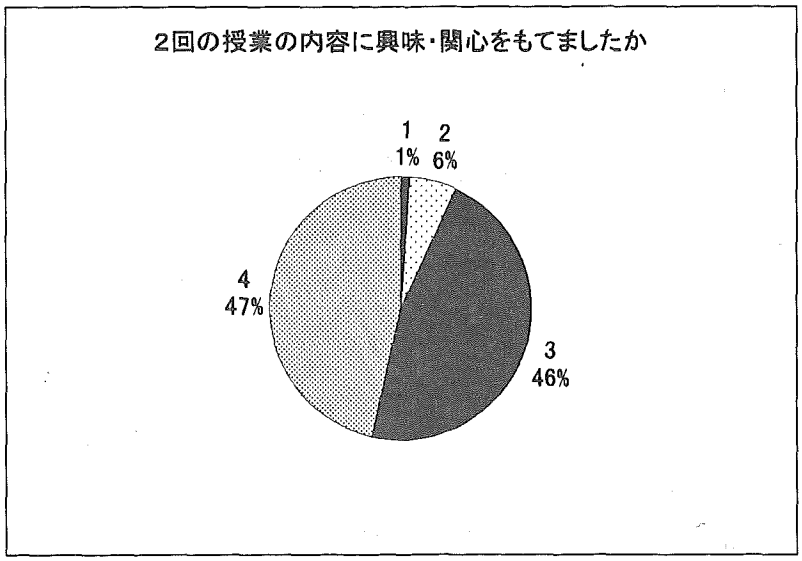
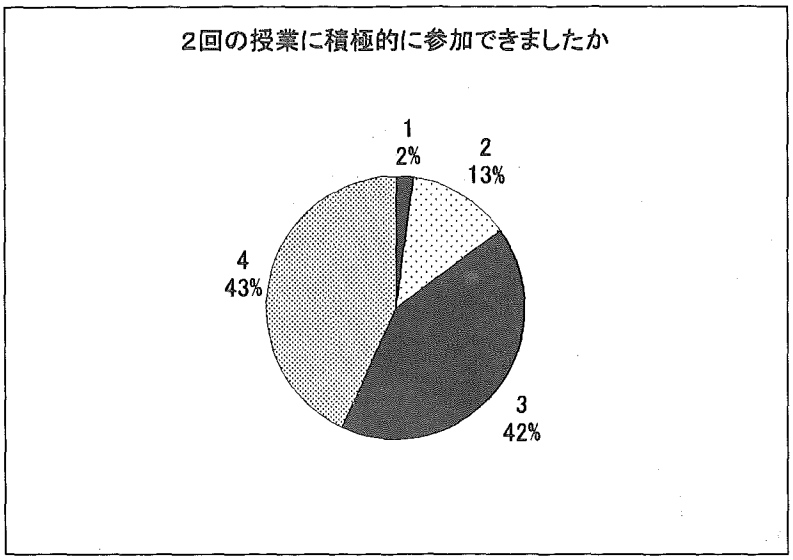
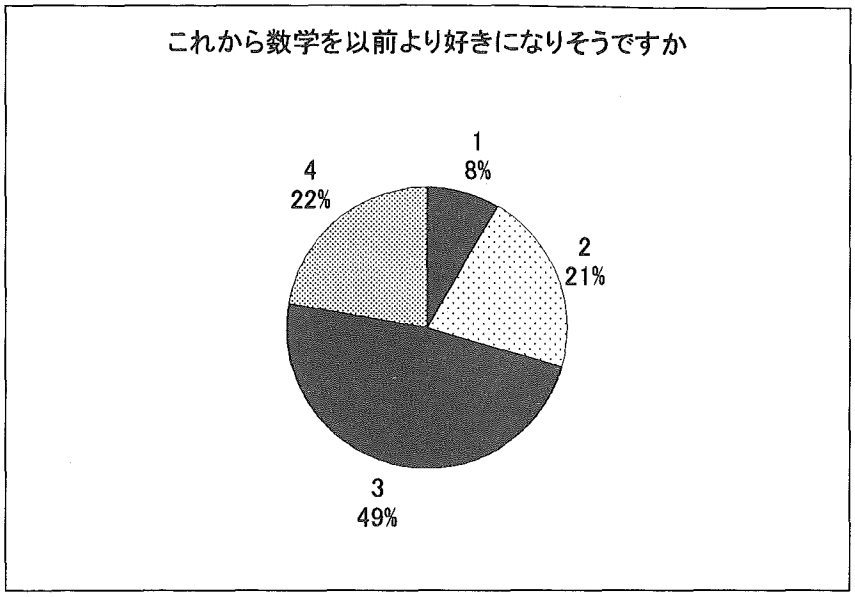


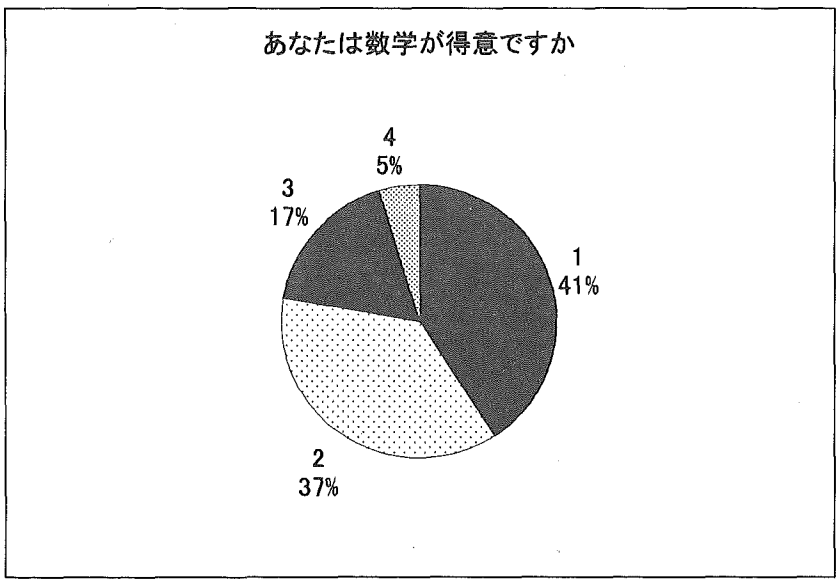
表７　授業後アンケート

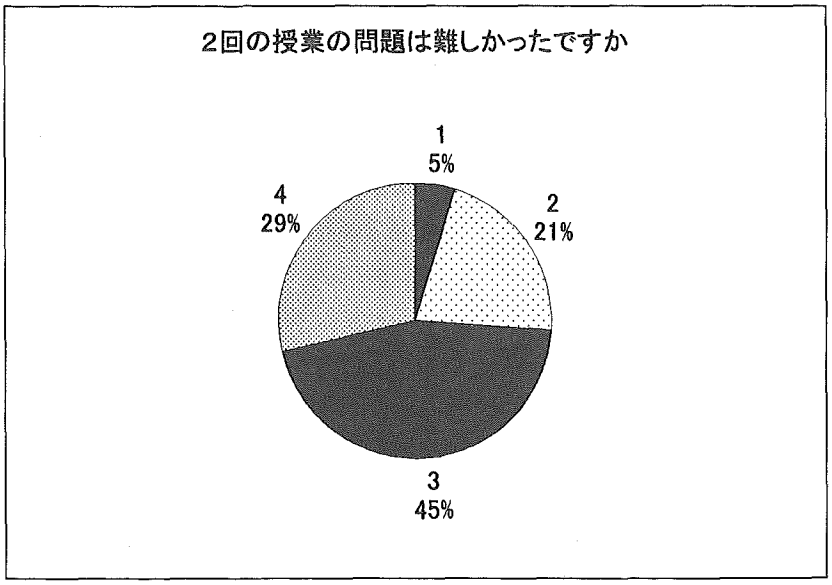
（１：そう思わない，２：どちらかといえばそう思わない，３：どちらかといえばそう思う，４：そう思う）

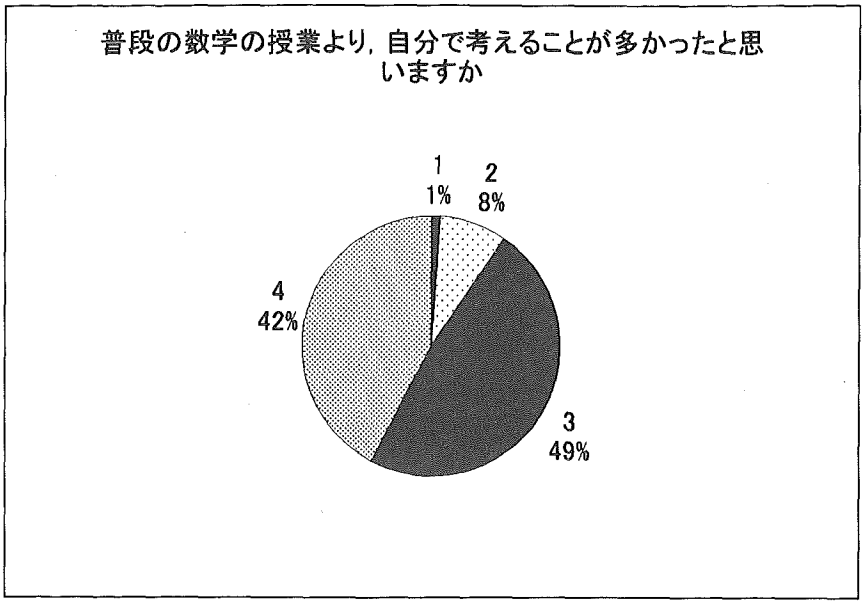


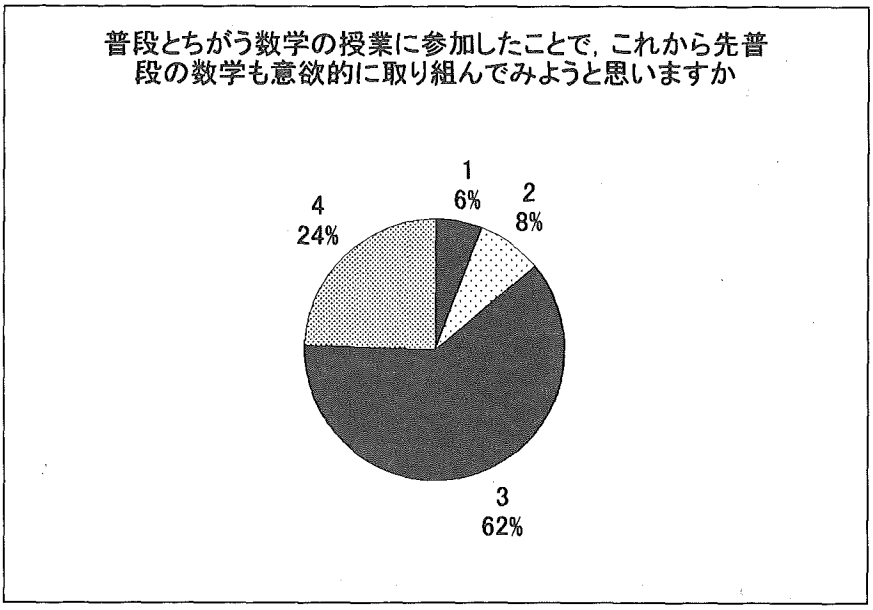



これから数学を以前より好きになりそうですか
1
8%
2
21%
3
49%
4
22%


あなたは数学が得意ですか
1
41%
2
37%
3
17%
4
5%


2回の授業の問題は難しかったですか
1
5%
2
21%
3
45%
4
29%





授業前アンケートでは数学が好きではないと答えた生徒が全体の６８％であるが，授業に興味・関心をもっている生徒が６３％，授業に積極的に取り組んでいるという生徒が７１％であった．少し矛盾する結果とも思えるが，これは本校の生徒は素直であるということ，授業者が生徒から指示されていることが原因と思われる．授業に対してはとても積極的な生徒達であるので，今回の授業に対しても，９３％の生徒が興味・関心を示し，８５％の生徒が積極的に取り組んでくれた．その甲斐あって，９１％の生徒が思考の葛藤を味わい，授業の内容は難しかったと７４％の生徒が感じたにもかかわらず，８６％の生徒は数学に対して意欲的になった．このことは，純粋に鳩の巣原理を活用して問題を解くという行為を楽しんでくれたのではないかと思う．

５．評価方法について

２時間目の授業で扱った問題に対して評価を行った．評価に使った問題と評価基準は以下の通りである．

《問題》

1辺が10cmの正方形の花壇があります．その花壇に5本のチューリップを植えます．どんな植え方をしても，そのうちの2本の距離が$5\sqrt{2}$cm以下となるような2本は存在するでしょうか？？

《評価基準》

A：巣に対応するものの数が4以下にならなければいけないことが理解できる
B：鳩に対応するもの，巣に対応するものが何であるか理解できる
C：何も取り組んでいない

生徒の解答の状況は以下の通りである．

A：36．4%（32人/88人中）

B：61．4%（54人/88人中）

C：2．3%（2人/88人中）

巣に対応するものの数を$5\sqrt{2}$と答えている生徒が多かった．Bの生徒の中には，理解度の差が大きく，鳩に対応するものと巣に対応するものの両方を理解している生徒，どちらか片方しか理解していない生徒，なんとなく正解を記入している生徒とさまざまである．評価方法は個人で行ったが，隣の人に正解を聞いて書いた生徒もいるであろう．生徒に思考の葛藤を味わってもらうためにも，グループ学習にして生徒同士の発言を活発にし，グループで，個人で考えを深めてもらい，グループでの評価にしたらいいのかもしれないと感じた．

6．まとめ

離散数学教材を扱う授業において評価を行うことは，今までの評価ではなかなか難しいということを実感した．2時間目については評価を行うという事情もあって，個人学習の形態をとった．しかし，実際に授業を観察してみると，同じ生徒であるにもかかわらず生徒の輝き具合，授業の盛り上がり具合には雲泥の差があった．こんなにもちがうものなのか，と痛感できたことは，離散数学の授業はグループ学習の形態で行うべきだという意見を実践と共に主張できることになり，良い経験となった．今回の実践授業を通して，離散数学教材を扱う授業は，グループ学習で行い，最初，生徒は鳩の巣原理の考え方を活用して問題を解くことができなくても，グループでディスカッションを行う中でその生徒が考え方を理解し，問題を解決し，納得できたのであれば，Aという評価をしても構わないのではないかと思う．グループごとに行う評価方法が存在してもいいのではないだろうか．課題としては，離散数学教材は問題解決までの過程が大切で，そこの部分の生徒の思考過程を評価したいと思っているが，有効な評価方法が今現在では思い浮かばない．今後さまざまな方からの意見と共に考えていきたい．また，今回の授業は，離散数学というものに初めて触れる数学教員が行った．2名にしていただき，はじめの2人の反応は，不安げな感じであったが，3人で事前に打ち合わせを行い，授業をする際のポイント，どういうことに注意すべきかを事細かく聞いてくださり，2人共に十分理解していただき，快い協力のおかげですばらしい授業を見せていただいた．打ち合わせをしたことで，扱う問題も生徒が身近に感じられるような題材のものに変わった．打ち合わせの時に出てきた意見としては，①「少なくとも」という語は日本語として難しいので理解できるか②鳩の巣原理の考えが主張したいのは，「2羽以上」なのか「巣が存在する」なのか，などがあげられる．①については授業では生徒の方から発言として出てきたので，特に問題はなかった．②は「**1．題材について**」にあるように鳩の巣原理は存在命題を証明するときに効力を発揮するものだという説明をすることで理解して頂いた．今後の学習指導要領の改訂で離散数学が導入された際には，学校によっては，離散数学を全く知らない教員ばかりであることも予想される．その学校での離散数学の授業がドリル的なものになってしまう恐れもあるので，導入する際には，解説書のようなものがたくさん出版されたらいいなと思う．

離散数学教材を扱う授業は，グループ学習が中心となる．グループでディスカッションを行うことは，自分の意見を主張したり，相手の意見を聞き入れたり，というコミュニケーションが重要になってくる．グループでの意見をまとめるという，人と協力して，１つのものを生み出す過程は，社会人になって会社で働く際にも重要なことであると思われる．そういう力を育てるという意味においても，離散数学を高校数学に導入するのは意義のあることではないだろうか．

簡単な「鳩ノ巣原理」の考え方と証明

ー考え方から証明へー

茂出木　祥高
東京都立芝商業高等学校

【要約】商業高校１年生に、果たして「鳩の巣原理」を理解して使いこなせるか。いや、必ず理解できるはずと考え授業実践した。簡単な「鳩の巣原理」の日常の例から始まり数学的な例へと進み、証明まで進もうと、挑戦してみた。生徒は普段と違う授業のせいか、一生懸命に考えていた。生徒は１年生男子 12 名女子 23 名のどちらかというと数学に苦手な生徒が多いクラスである。２時間の授業時間で理解でき使いこなせるかと不安であった。やはり２時間ではきびしく、とくに原理よりも除法の剰余の理解に時間をとられてしまった。しかし、生徒は普段の計算とは違う数学に親近感を持ち、よく考えてくれた。３人グループに分けて授業に取り組ませたが、いろいろな意見が出て興味深かった。その一方、グループ数が多くかつ時間不足のため、意見の集約を十分にできなかったのが心残りである。

１．題材について

鳩ノ巣原理は、存在を証明する場合に力を発揮する。今回は「鳩の巣原理」のごく簡単な表現方法でわかりやすいものを利用した。それは、

「ｎ個の巣穴にｎ＋１羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る」

というものである。専門的な鳩ノ巣原理は

「ｐ＋ｑ－１羽の鳩が２つの巣を共有しているとする。すると、少なくとも１つの巣はｐ羽の鳩がいるが、もう１つの巣にはｑ羽の鳩がいる」

であり、これは明らかに本校の生徒には難しすぎるので断念し簡単な物を選び使用した。

２．単元「鳩の巣原理」について

現在、学校や生徒の間にはいろいろな問題が出てきている。考えるに、そのような問題は生徒同士のコミュニケーション不足が原因の一つではないか、そして、生徒のコミュニケーション能力の不足が原因の一つではないかと考える。その力をつける意味で、生徒の考える力や想像力を強化し、思考の独創性・発展性・飛躍性を伸ばすことができればと考えた。

簡単な計算を使い、難しい式と計算は使わないからこそ、どんな生徒にも考えられる、解くことが出来る。それが離散数学の最大の利点であり、その考える力が「生きる力」につながると思う。そして、その結果、数学的な考え方・論理的な思考が身に付く。この考え方が社会に出てからも大きな助けになるはずである。

今回、考え方の根底事項として簡単な「鳩の巣原理」を用い、分かりやすい例から発展して一般的問題・証明へと進めたい。

また、言葉遊び（？）とも思えるこの原理・証明から、日本語の理解度が増し言葉を活用できる能力を養うことが出来ると思う。この力が深まることは生活する上でも、人とコミニュケーションを取る上でも多いに役に立つことになる。また、相手を納得させる説得力・インフォメーシ

ョン能力の強化にもつながり、これは社会人になったときに、有利に働き、結果的に「生きる力」に通ずると考える。

3．生徒について

本校は東京都立の商業高校であり、東京都立商業高校では上位に入る。しかし都立高校全体ではレベル的に中位となり、生徒にとっては、必ずしも数学は得意教科ではなく、むしろ苦手な科目だという生徒が多い。教科書の問題を定期考査に出題し平均点が６０点というレベルである。

しかし、よく努力する生徒が多く、在校生の約７０％が全国商業高校協会の簿記検定１級を取得し、また日本商工会議所の簿記検定２級も約３０％の生徒が取得して卒業していく。また、就職率は１００％で約１００人が早くから決まり、大学進学者も約４０人おり、目的に向かいこつこつ地道に努力する生徒が多い学校である。

今回はその中の１年生のクラスを選んだ。あえて、数学の平均点が低いクラスを選んでみた。

4．授業計画

２時間

１時間目　原理を理解させ、日常の出来事を考える

２時間目　原理を用いて、数学の問題を考えさせ証明させる

・指導の留意点

①実際に考えさせ考えたことを書かせる。

②用紙を配布し作業の効率化を図る。

③4 人のグループでの討論をさせる。

④生徒の理解度により進度を変えることもある。

⑤簡単な考え方であるが多くに応用でき、かつ、考える練習になるのでなるべく時間をとり考えさせる。

5．授業の実践

１時間目　日常の「鳩の巣原理」（日常の出来事）

用語の説明から入り、日常の例を説明し「鳩ノ巣原理」を考え証明へと進む

２時間目　数学での「鳩の巣原理」（数学への応用）

確認作業をして数学的な問題へと進む

以下にその学習指導案とワークシートを示した。

鳩ノ巣原理　学習指導案

1，平成 18 年 12 月 18・19 日（月・火）第 6 校時（14：10～15：00）

2，1 年 B 組 35 名（男子 12 名、女子 23 名）

3，指導者　茂出木祥高

4，単元　鳩ノ巣原理の考え方

5，単元の目標

１．鳩ノ巣原理を理解させる。（知識・理解）

2．その考え方が自分にとって大いに役に立ち有利になること理解させ身に付けさせる。
（関心・意欲・態度）（数学的な見方・考え方）（表現・処理）

6，学習指導計画

・2時間

1時間目　原理を理解させ、日常の出来事を考える

2時間目　原理を用いて、数学の問題を考えさせる

7，指導の工夫

① 実際に考えさせ考えたことを書かせる。

② 用紙を配布し作業の効率化を図る。

③ 4人のグループでの討論をさせる

④ 生徒の理解度により進度を変えることもありうる。

⑤ 簡単な考え方であるが多くに応用でき、かつ、考える練習になるのでなるべく時間をとり考えさせる。

8，2時間の指導計画

1時間目

段階	時間	学習活動	学習内容	指導の留意点
導入	5分	内容説明	今日の内容の説明 ・考えること ・簡単な法則を応用すること 考えてみよう。 問題1 1Bの生徒5人の中には、同じ血液型の生徒がいる　これは正しいですか。これを証明しなさい。	不十分であれば再度説明する 身近な例で関心を引く 4人グループで考えさせる
展開		鳩ノ巣原理の説明 原理の意味 説明 各班に問う 問題を解かせる グループで考える 時間があれば板書させる	質問1 4個の巣穴に5羽の鳩を入れる場合、どんなことが起こるか 解答1 必ずどれかの巣箱に2羽以上入る 質問2 10個の巣穴に11羽の鳩を入れる場合、どんなことが起こるか 解答2 必ずどれかの巣穴には2羽以上入る <u>鳩ノ巣原理</u> n個の巣穴にn＋1羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には2羽以上入る 応用1 18個の犬小屋に20匹の犬を入れる場合、どんなことが起こるか 解答1 必ずどれかの犬小屋には2匹以上入る	箱とボールを板書しながら説明する 各生徒の取り組み方（関心・意欲・態度） 出来上がり具合（表現・処理）を確認する。 原理の説明 どれが鳩で どれが巣か 人数（鳩）が増えた

				場合など
			応用２ １Ｂ組い生徒 15 人の中には同じ星の生徒が２人以上いる。これは正しいか 解答２ 正しい。鳩ノ巣原理により（生徒 15 人が鳩、星座 12 個が巣）必ずどれかの正座の生徒が２人以上いる。	原理をうまく使い証明すること
			応用３ １年Ｃ組あ組生徒 14 人の中には、同じ星座の生徒が必ずいることを証明せよ 解答３ 生徒14人を12個の星座の場所に置くから、鳩の巣原理により、必ず２人以上入る	鳩ノ巣原理を用いると簡単に証明できることを理解させる 原理－理解－証明－実用（日常でも）
			応用４ 芝商生 600 人の中には同じ誕生日の生徒が２人以上はいることを証明せよ 解答４ 生徒600人（鳩）を誕生日の365通り（巣）の場所におくから、鳩の巣原理により必ず２人以上入る	
		出来た生徒への課題 （次回の問題）	練習問題１ 港区内には自分と全く同じ本数の髪の毛を持つ人が最低一人はいることを証明せよ。ただし、港区民の人工は２０万人、人間の髪の本数は１８万本以下とします。 解答 区民の人口（20万人・鳩）の方が、髪の毛の数（18万本・巣）より多い。よって、鳩ノ巣原理により、港区内には自分と全く同じ本数の髪の毛を持つ人が最低一人はいる。 （別解）港区民のすべての髪の毛の本数が異なると仮定する。0 本から 18 万本まですべて一人ずついたとしても、18万１人しかならず、人口 20 万人には足らないので矛盾する。（背理法）	背理法には簡単に触れる 作業をし確認してから考えさせる
ま と め	５分	今日の内容確認	・鳩の巣原理の確認 ・説明の仕方、簡単さ ・日常や日本語への応用	再度確認 次回の説明

２時間目

段階	時間	学習活動	学習内容	指導の留意点
導入	５分	前回の復習	<u>鳩ノ巣原理</u> ｎ個の巣穴にｎ＋１羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る 復習・・応用３ １年Ｃ組あ組生徒 14 人の中には、同じ星座の生徒が必ずいることを証明せよ 解答３ 生徒 14 人を 12 個の星座の場所に置くから、鳩の巣原理により、必ず２人以上入る	忘れている生徒も多いので、丁寧に説明する 簡単に答を答えさせる
展開	４０分	数学への応用問題	応用練習問題 ① 任意に与えられた相違なる４つの数から適当に２つ選ぶと、その差は、３の倍数になる。これを証明せよ (解答) 相違なる４つの整数（鳩）は、必ず３種類（巣）に分けられる。①割って２余る数 ②割って１余る数 ③3 で割りきれる数 よって、鳩ノ巣原理により４数の中には必ず①②③のうち同じものが消えて３の倍数になる。 ②1 から 1999 までの 1000 個の奇数がある。この中から、501 個の奇数をどのように選んでも必ず、その 501 個の中に、２つの相違なる数で、和が、2000 となるものが存在する。 (解答) 和が 2000 となる奇数は 1 と 1999、3 と 19975 と 1995・・・・999 と 1001 の 500 個ある。（これが巣）。1000 個の奇数から 501 個選ぶから（これが鳩）必ず和が 2000 となる組合せができる。 ③ １辺が２の正三角形の内部および辺上に、５つの点をとる。このとき、２点間の距離が１以下であるような２点が存在する。 (解答) 図のように正三角形４等分する。その小さい正三角形に２点があればその距離は必ず距離は１以下となる。よ	どれが鳩 どれが巣か を丁寧に考えさせる 言葉では不足する必ず図を書く 「1 と 1999、3 と 19975 と 1995・・・・999 と 1001 の 500 個」板書する 板書する 正三角形をかき 補助線をかく

			って小さい三角形に2点が入ることを証明すればよい。 4つの小さい正三角形に5点を打つから、鳩の巣原理により、必ず小さい三角形に2点が入る。よって距離が1以下の2点が必ず存在する。	
まとめ	5分	まとめ	いろいろな考え方・証明方法があり、それらを身につけることの有利さを確認させる。	

9，授業の評価

① 鳩ノ巣原理を理解できたか（知識・理解）（数学的な見方・考え方）

② 問題をよく考え、取り組めたか（表現･処理）（関心・意欲・態度）

③ 応用問題を理解でき証明できたか（表現･処理）（数学的な見方・考え方）

１０，　その他

高校１年生が対象なのでどこまで理解できるか懸念される。

この証明・考え方から、日本語の理解度が増し言葉を活用できる能力を養うことが出来ると思う。日本語力が高まることは、生活する上、人とコミニュケーションを取る上で多いに役に立つことになる。また、相手を納得させる説得力・インフォメーション能力・コミュニケイション能力の向上にもつながる。これは社会人になったときに、大変に有利なことになると期待できる。そして、これが生きる力に通じていくと考える。

ワークシート１

今日の内容 ・ ・ 問題１ １Ｂの生徒５人の中には、同じ血液型の生徒がいる これは正しいですか。 これを説明しなさい。	用語の説明・・・読んでおくこと 定義・・・そのものについて概念をはっきりと定めたもの 公理・・・自明なものと認められた根本的命題 原理・・・物事の根本になっている前提なこと 法則・・・おきて、規則、必然的な普遍的な関係、 公式・・・法則を表した式 定理・・・公理、原理により証明された命題 命題・・・正しい間違いがはっきりしたもの

質問１
４個の巣穴に５羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る　これは正しいか

質問２
１０個の巣穴に１１羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る　これは正しいか

鳩ノ巣原理
ｎ個の巣穴にｎ＋１羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る

応用１
１０人の生徒を１１個の部屋に入れる場合、必ずどれかの部屋には２人以上入ることを証明せよ

応用２
１８個の犬小屋に２０匹の犬を入れる場合、必ずどれかの犬小屋には２匹以上入ることを証明せよ

応用３
１年Ｃ組あ組生徒 14 人の中には、同じ星座の生徒が２人以上いることを証明せよ

応用４
芝商生 600 人の中には同じ誕生日の生徒が２人以上はいることを証明せよ

ワークシート２

鳩ノ巣原理・・・ｎ個の巣穴にｎ＋１羽の鳩を入れる場合、必ずどれかの巣穴には２羽以上入る
問題
昨日のような問題を作りなさい（どれが鳩で、どれが巣か）

復習・・応用３
１年Ｃ組あ組生徒 14 人の中には、同じ星座の生徒が必ずいることを証明せよ

応用練習問題
①　相違なる４つの整数から適当に２つ選ぶと、その差は、３の倍数になる。これを証明せよ

② 1から1999までの1000個の奇数がある。この中から、501個の奇数をどのように選んでも必ず、その501個の中に、和が、2000となる2つの奇数が存在する。証明せよ。

③ 1辺が2の正三角形の内部および辺上に、5つの点をとる。このとき、2点間の距離が1以下であるような2点が存在する。証明せよ。

練習問題1
港区内には自分と全く同じ本数の髪の毛を持つ人が最低一人はいることを証明せよ。ただし、港区民の人工は20万人、人間の髪の本数は18万本以下とします。

6．研究協議会での意見

（1）鳩の巣原理について（日常の出来事）

・用語の説明は必要ないと思う。時間がかかり曖昧さも残る。せめて「原理」だけでいいと思う。
・生徒は解答を見つけている。しかし、表現ができない。その表現方法を勉強する時間が今回かもしれない。
・「これは正しいか」「どんなことが起こるか」「これを証明せよ」の問だが、前半は「正しいか」後半は「証明せよ」でよいと思う。
・「どんなことが起こるか」の問いには様々な解答があり、おもしろさで関心を引き集中させるにはよい問いかけだ。ただ、いろいろな解答には1つ1つ丁寧な説明が必要だ。
・「どんなことが起こるか」の問いには様々な解答からいろいろなやりとりをし、そこから1つの方向へ導き、説明できる根拠へといくのもよい。
・今回は証明の模範解答・こう書けば証明になるよという例を出した。そのような言葉・方法に慣れるという側面もあった。
・直感で「正しい」と判断できる例を多く考え重ねて、それから、正しい理由をいう、証明するという過程を経る方が、生徒に定着しやすいかもしれない。

・話の中でモデル化をし、そこからフィードバックする方法もある。
・うまく表現できない生徒がいるのは仕方がない。
・「鳩の巣原理」の「原理」より「論法」という言葉の方が証明の場には、ふさわしいかもしれない。
・次回は確認のために「問題を作らせる」という作業も良い方法だ。

（2）数学問題への応用について

・具体的に1から20名で板書し規則を生徒に見つけさせた方がよい。（今回は教師が規則を話してしまった）生徒に見つけさせることができればすばらしい。
・もっとやさしい例から進むのも一案だ。
・3の倍数、その差、4つの数など具体例を1つ解き、他は生徒に考えさせ、書かせるのもよい方法だ。
・生徒にとってはやはり難しい内容だ。①だけで十分な気がする。急がずもっと丁寧に説明すると生徒の定着率が上がると思う。1問に30分かけてもよい。
・問題作成作業は良いことだ。生徒の理解度を測る意味でも良い。そのやりとりで関心を引ける。すなわち、理解度が深くなる。
・作成し発表させることも大事な評価点になる。時間はかかるがその行為は大切なことだ。
・数学の前提条件（剰余の分類、差が3の倍数）の確認に時間がかかるが、何とか生徒に見つけ出させたい。このことの方が「原理」より探し出しににくい場合が多いが、生徒には良い学習になる。
・結局、鳩・巣を探すことより前提条件を考える方に時間がかかるが、それも数学の勉強である。
・当然のことを、当然と考えさせることも大事だし、当然のことをうまく説明させることも大事だ。今回は、「このように証明するのだよ」と例を示しそれに慣れる練習でもある。

7．授業者の意見

・今回は2時間という時間で十分と判断し、日常の「鳩の巣原理」から数学への応用まで授業を行った。結果として、「原理」を理解するという観点では到達できたが、数学への応用という面では不十分な結果であった。特に証明するという面では、証明の方法と言葉の説明で時間がかかり、不十分さが多く残る結果となってしまった。準備不足の面もあり反省すべき点である。
・今回は欲を出しすぎ、また生徒を過大評価していた部分もあり、また生徒の個人学力差が大きい面も影響していた。しかし、その学力差が影響しないという面で離散数学を推奨するのであるから、今後教材を大いに研究する必要があると感じた。
・数学への応用という面ではやはり数学の学力が必要であった。剰余に関する内容の理解不足が授業進度に影響したため、それを理解させることに時間を費やした。もっと、日常の例に徹する方が良い結果が出ると思う。
・ワークシートを使用したため、時間短縮はでき生徒の取り組みもまあまあであった。ワークシートの解答も様々なものがあり大変に参考になった。
・35人という生徒に対し、4人班9班というグループ学習はやはり私語が増えるという困難さもありやりにくい。やはり全体に問いかけ、考えさせ、個人から解答を引き出すという

方法の方が個人的にはやりやすい。特に数学が苦手な生徒が多い学校にはその方がふさわしいかもしれない。

・今回の授業で新しい数学の一面を見せることはできた。数学という計算以外の一面や日常の数学という一面を感じさせられたと思う。そのことは決して無駄なことでなく、考え方を深くし、生徒の視野を大きくすることができ、何かを感じてくれたと思う。離散数学の重要性を認識してくれたと思う。それこそ、言葉を理解する、言葉を使いこなす、よく考える、誰でも考えられる、討議する、発表する、証明する、などの行為は数学そのものであり、数学だからこそ出来る実践である。このことが生徒の考える力につながることは間違いないことである。

離散グラフの高等学校への導入にともなう評価の研究
—グループ学習による問題づくりを通して—

横澤　克彦
長野県上田千曲高等学校

【要約】本稿では離散グラフを高等学校に導入する際の評価方法について得られた示唆を報告する。昨年度までの研究で、離散グラフでは活動や議論を中心にした授業が効果的であることが分かったが、そうした特徴をもつ授業の学習評価をどう行ったらよいかが今年度の研究課題であった。

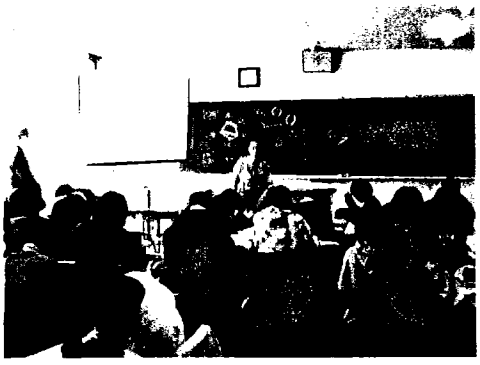
そして活動面の評価については、グループ学習によってつくられた問題を評価することが有効であることが分かった。その評価規準については、一般に授業のねらい（目標）として設定される４観点だけではなく、今回の授業では特に４観点の１つである「見方・考え方」について３段階の水準（◎○△）を設定して、問題を分類することにより評価することとした。

また情意面の評価については質問紙調査を行い、授業への感想や単元指導前後での数学に対する認識の改善などを評価することができた。

１．研究の目的と方法

昨年度までは離散グラフという内容で授業を行うときの、教材開発や授業展開の工夫について検討してきた。[*1] そうした実践を通して筆者は、離散グラフの内容が次のことを生徒により伝えやすいと感じている。

①それが応用範囲の広い問題解決の道具であること。
②その応用範囲は生徒の身近な事例にも及ぶこと。
③この道具を使いこなすことは、将来生きていく上での自信になること。



またそうした実感をもたせるための授業方法として、数学をつくったり使ったりするような数学的活動や議論の場面を多く取り入れることがより有効であることが分かった。

そして今年度の研究目的は、活動や議論を中心とした離散グラフの授業では、生徒の学習評価をどのよう行ったらよいかについて示唆を得ることである。

具体的には、評価の対象，評価の方法，評価規準，水準（評価基準），評価に至るまでの授業展開についての示唆を得たいと考えている。

---

*1 拙稿(2006)「「グラフ理論」の単元による指導－活動や議論を中心とした授業への転換を目指して－」、長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』、国立教育政策研究所、 pp.215-230

2．評価時に扱った問題

2－1．前時の問題（食べ合わせ問題）

【問題（原問題）】

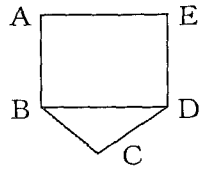
食材A～Fを使って献立を考えますが、食べ合わせの良し悪しがあるようです。作る料理の数はなるべく少なくして、別々の人に食べてもらう。

最低何種類の料理をつくればよいでしょう。

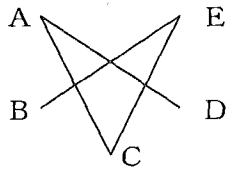
作る料理の数と食材の組合せを決めてください。

	A	B	C	D	E
A		○	×	×	○
B			○	○	×
C				○	×
D					○
E					

【解法１】○印に注目した場合の離散グラフ



【解法２】×印に注目した場合の離散グラフ



【答え】・作る料理の数　：　最低２種類

・食材の組合せ例：　①（A，E）と（B，C，D）　②（A，B）と（C，D，E）

2－2．評価時に扱った問題（問題づくり）

前時の食べ合わせ問題を参考にして、離散グラフを使って解く似た問題をつくってみよう。

2－3．ねらい（評価規準）

・問題づくりに興味をもち、他者のつくった問題のよさに気づく。（関）

・離散グラフの見方・考え方を他の場面に適用できる。（考）

・離散グラフを他の場面に当てはめて表現し利用できる。（表）

・他の場面で使われている離散グラフの意味を理解することができる。（知）

2－4．授業方法（グループ学習）

個人追究によって問題づくりをしたあと、２，３人のグループで互いに発表しコメントを出し合った。よい問題を取り上げ一斉授業の中で発表し、他者の発想のよさや自分へのコメントをふまえて、再び問題づくりを行い自らの問題をよりよいものに修正した。

3．評価の方針

以下では評価の対象と評価方法について述べていく。大事にしたいことは、現場でより実践しやすいものになっているかであった。教員にとって過大な負担とならず日常的にでき、次の指導へとすぐにつなげていけるような指導と評価の一体化を意識した。

3－1．評価の対象

評価の対象は２つ考えている。

１つ目は、活動面からの評価である。離散グラフの高等学校への導入においては、活動や議論を中心にした授業が有効であった。そのため、そうした活動や議論の過程を評価の対象にできないかと考えた。

2つ目は、情意面からの評価である。離散グラフの学習を通して、生徒の数学に対する認識がどのように変化するのかはとても興味深いところである。そうした情意面での変化も評価の対象にし、指導の前後で比較できるようにしたいと考えた。

3－2．活動面の評価方法

活動面を評価する方法として、問題づくりという授業を考えた。

問題づくりは離散数学以外の内容を扱うときにも実践されており、下表左のような学習効果が報告されている[*1]。

それらは下表右のように離散グラフで期待されている学習効果[*2]とも重なる部分が多い。下表は筆者がそれぞれの学習効果を番号で対応づけて捉えたものである。

問題づくり（方法）がもつ学習効果	離散グラフ（内容）がもつ学習効果
①すべての生徒が積極的に授業に参加する	①数学的活動を多く取り入れることができる
②自分の力に応じてだれもが精いっぱい学習に励む	②予備知識を必要としない内容が多い
③数学に興味を感ずる	③応用範囲の広い問題解決の道具であることを実感できる
④発見の喜びがある	④その応用範囲は生徒の身近な事例にも及ぶ
⑤いつでも「問題を発展させる」態度がつくられる	⑤この道具を使いこなすことは、将来生きていく上での自信になる
⑥個別学習と集団学習の調和した授業が展開できる	⑥自らの考え（事例）をもって他者と意見交換できるためそのよさを感得できる
⑦多様な観点からの評価を可能にしてくれる	⑦今回は離散グラフの見方・考え方を身の回りの事例に適用できたかという観点からの評価が可能

これらをふまえ離散グラフという学習内容を、問題づくりという授業方法で扱うことによって、期待する生徒の活動がより顕在化し評価しやすくなると考えた。

3－3．評価規準と水準

一般に授業のねらいは、評価規準（質的評価項目）として設定される。

	場面	問い
◎	異なる	異なる
	同じ	異なる
○	異なる	同じ
△	同じ	同じ

◎：原問題と異なる場面への適用があり、問いも発想に飛躍がある問題
（また原問題と同じ場面でも、問いの発想に飛躍がある問題）
○：原問題と異なる場面への適用があるが、問いが同じ発想の問題
△：原問題と同じ場面で、問いも同じ発想の問題

今回の問題づくりではその中で特に見方・考え方に注目し、既習のそれが他の場面へ適用できた

---

*1 竹内芳男・沢田利夫（1984）「問題から問題へ－問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善－」、pp.21-23

*2 長尾篤志・景山三平・長崎栄三（2006）『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』，国立教育政策研究所

かを評価したいと考えた。そこで◎○△による３段階の水準（量的評価項目）を設定し、つくられた問題の達成度によって分類することにした。
分類の基準は原問題からどれだけ離れていて、しかもよい発想をもっているかで評価した。また教員への過大な負担を軽減する上でも、３段階が適当と考えた。 なおこの３段階で◎の評価を得たことは、ねらいの中の見方・考え方において「十分満足できる」と評価されたことを意味する。

３－４．情意面の評価方法

情意面の評価については２種類の調査を行った。
１つ目は、問題づくりの授業を終えた後の感想文による調査であり、２つ目は離散グラフの指導（８時間）前後での、数学に対する認識の変化を生徒質問紙によって調査した。

後者の生徒質問紙はＴＩＭＳＳ[*1] の調査で使われた質問紙を参考に行った。一般に生徒の数学に対する認識はあまり良好とはいえないが、離散グラフの内容に触れることで数学に対する認識が改善されることを期待している。

以下は生徒質問紙の調査項目である。指導前が８項目であり、指導後は９項目目を追加した。選択肢は「強くそう思う」「そう思う」「そう思わない」「まったくそう思わない」の４選択肢であるが、集計は選択肢の「強くそう思う」「そう思う」を「肯定感」として１つにまとめた。

（１）数学の勉強は楽しい　（２）数学は、たいくつだ　（３）数学は、やさしい教科である。
（４）数学は、社会で役立っている（５）数学は、生活の中でだれにも大切だ
（６）数学を学ぶと、論理的に考える力が高まる（７）数学を使って何か解決してみたい
（８）将来、数学を使う事が含まれる仕事をしたい（９）離散グラフを使って何か解決してみたい

４．授業の実際

４－１．本校生徒の実態

本校は普通科がなく、７つの学科（建築科，機械科，電子機械科，電気科，商業科，食物栄養科，生活福祉科）からなる職業高校である。

今回授業を行った食物栄養科の１年生は女子３９名，男子３名のクラスである。進路は就職と進学が半数ずつおり、勉強は大切だと考えてはいるが数学を苦手とし嫌悪感をもつ生徒は多い。

問題づくりをした経験はほとんどないため、食物栄養科らしい課題を与えたり、グループ活動など取り組みやすい授業形態を設定することで、より積極的な参加を促したいと考えている。

４－２．問題選びと扱い方の方針

離散グラフには前述のような学習効果が期待できるが、より活発な活動や議論が生まれるような問題選びが必要である。以下では８時間の指導で扱った問題選びとその扱い方の方針を述べる。

また今回の単元目標を「離散グラフを利用して、身近な事象を考察したり他者への論理的な説明を通して離散グラフのよさを認識し、数学に対する興味・関心を一層高めることができる」こととした。

４－２－１．解決の必要性を感じる問題

離散グラフは応用範囲は広いが、生徒にとって必ずしも身近な題材とは限らない。そこで本校が

---

*1 ＩＥＡ（国際教育到達度評価学会）が進めている TIMSS（Trends in International Mathematics and Science Study）と呼ばれる算数・数学及び理科の到達度に関する国際的な調査

７つの専門学科からなることを生かし、学科に合わせた題材を選び教材化した。

例えば、問題づくりの例に使った「食べ合わせ問題」は食物栄養科が調理実習のメニューを考えるときにいつも話題にされることであり、必要感をもって取り組めたと感じている。

またその必要感を強化するために、食べ合わせのよくない組合せをプリントにまとめ、その数の多さや自分たちの知らない組合せがあることなどを取り上げ、関心をもたせていった。

４－２－２．離散グラフの有用性を実感できる問題

離散グラフは（複数個の）点と（その間を結ぶ何本かの）辺だけからなる単純な図形である。しかし現実場面おける様々な関係を読みとれるように見方を変えながら、利用していけるところに特徴がある。たとえ同じ図形であったとしても、点を都市、線分をその間の交通路と見れば鉄道網や道路網となるし、電気を流す配線と見れば電気回路網となる。また点を国、線分を二国の隣接性を表すと見なせば地図にも見えてくる。さらに点を人、線分をその間の交友関係と見れば人脈図にもなる。このように解釈次第でいろいろな見方ができるところが特徴であり、その有用性が実感できるような問題を選ぶこととした。

４－２－３．活動や議論のきっかけを起こしやすい問題

一筆書きや地図の塗り分け問題などは実際に手を動かしながら追究していくことも可能である。離散グラフを使って結果や解法が分かったとしても、それで終わりではなく実際に確かめてみたり、条件を変えるなどして振り返ることで理解が深まりより定着も図れる。離散グラフにはそうした題材が多くある。

また解法が１つではないことも議論のきっかけにもなる。食べ合わせ問題で離散グラフをつくるとき、関係のよい食べ合わせ（○印）に注目するのか、関係の悪い食べ合わせ（×印）に注目するのかで追究方法が変わってくる。同じ結論は得られるが、どちらが有効であるのかは問題によっても異なり議論の分かれるところである。地図の塗り分け問題も、同じ色を塗る関係に注目するのか、異なる色に注目するのかで変わる。こうした葛藤を内在している問題を選ぶことが有効であろう。

４－３．授業展開上の工夫

４－３－１．互いを認め合うグループ学習

授業形態は２，３人のグループ活動とした。自分のつくった問題をお互いに発表し、互いにアドバイスするように指示した。そしてグループの代表作品をクラス全体に発表したあと、再度自分の問題をつくり直すことを求めた。

少人数のグループにすることで、会話を増やし他者に説明する機会を増やすことができる。また他者へのアドバイスを書いたり、他グループの発表を効くことで、おもしろい問題に対する発想や見方に気づき問題づくりの工夫を共有できないかと考えた。

４－３－２．自らの考えを表現するワークシート

ワークシートには、問題をつくるだけではなくその問題のよさをアピールする部分や問題を修正したときに意識した点などを書かせた。彼らがどのような見方・考え方を生かしたのか、また他者のどのようなよさを生かしたのかを捉え評価しやすくした。

５．評価の実際

５－１．活動面の評価

５－１－１．つくられた問題に対する評価の一覧

例題は食べ合わせという場面を取り上げ、最低何種類を問う問題であった。評価規準としては、

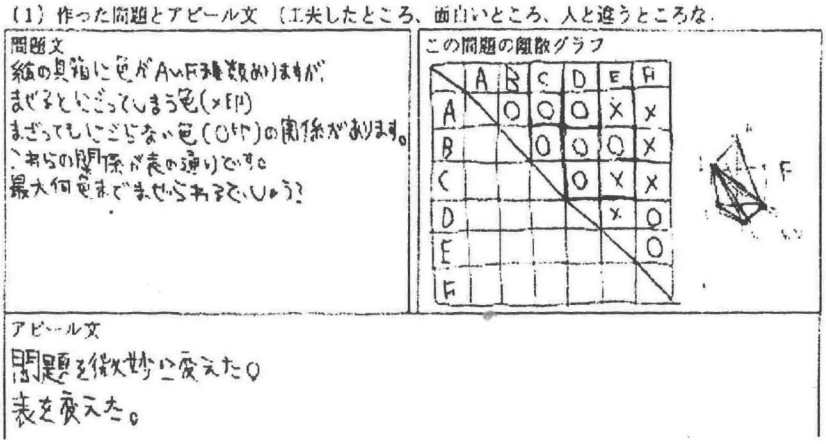
この場面と問いをどう変化させたかに注目した。なお、解けない問題でもよいとし、問題として成立しているかも問わないものとした。

	場面	問い	最初につくった問題（３７名中）	修正後の問題（３９名中）
◎	異なる	異なる	（ア）　６名	（ウ）　１１名
	同じ	異なる	０名	０名
○	異なる	同じ	（イ）　３１名	（エ）　２７名
△	同じ	同じ	０名	１名（前時欠席者）

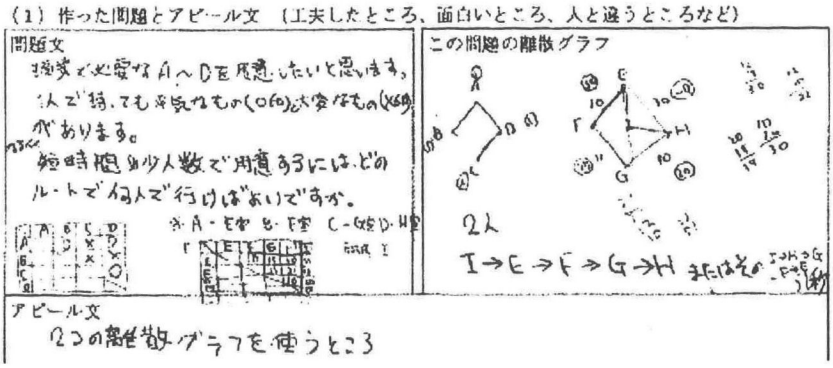
５－１－２．つくられた問題に対する評価の実際

（ア）最初につくった問題で「◎」評価を受けた問題

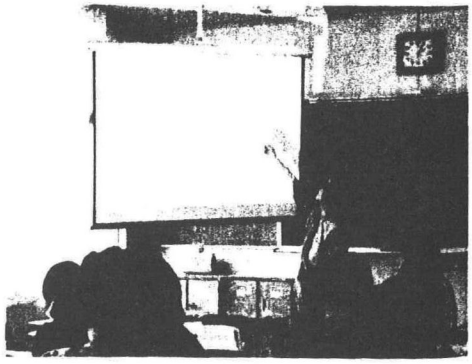
◎：原問題と異なる場面への適用があり、問いも発想に飛躍がある問題



この問題は、「最低」という原問の問いを「最大」に変えている。
授業では扱っていないが、完全グラフという見方に発展していく問題である。
２色で濁らない関係を示しているが、３色４色になったときにどうなるかは分からず、問題としては不備がある。



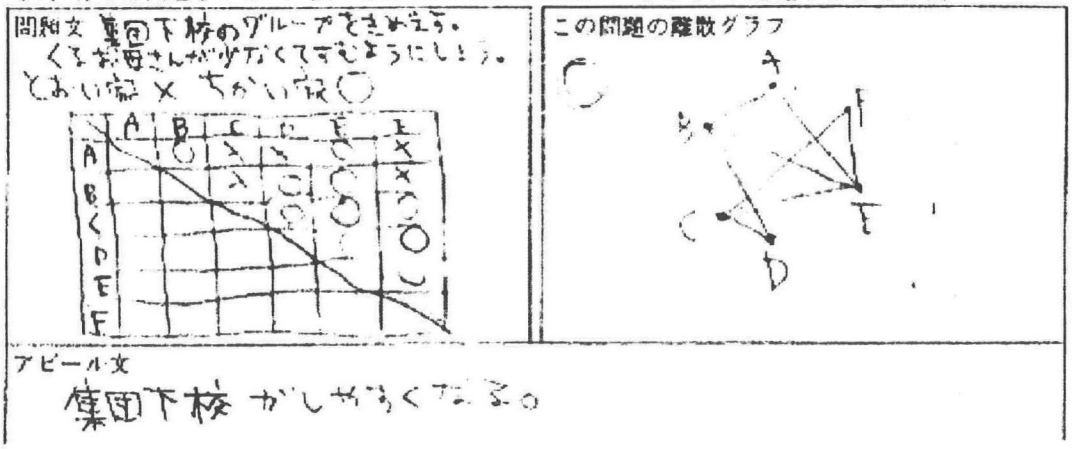
問いが「最低」から「ルート検索」もするようになっている。辺が２つの関係を表しているだけでなく、数値も入っている。このときの授業ではまだ扱っていなかったが、ネットワーク問題につながっていく問題である。離散グラフを２つ使った解き方もユニークである。



（イ）最初につくった問題で「○」評価を受けた問題

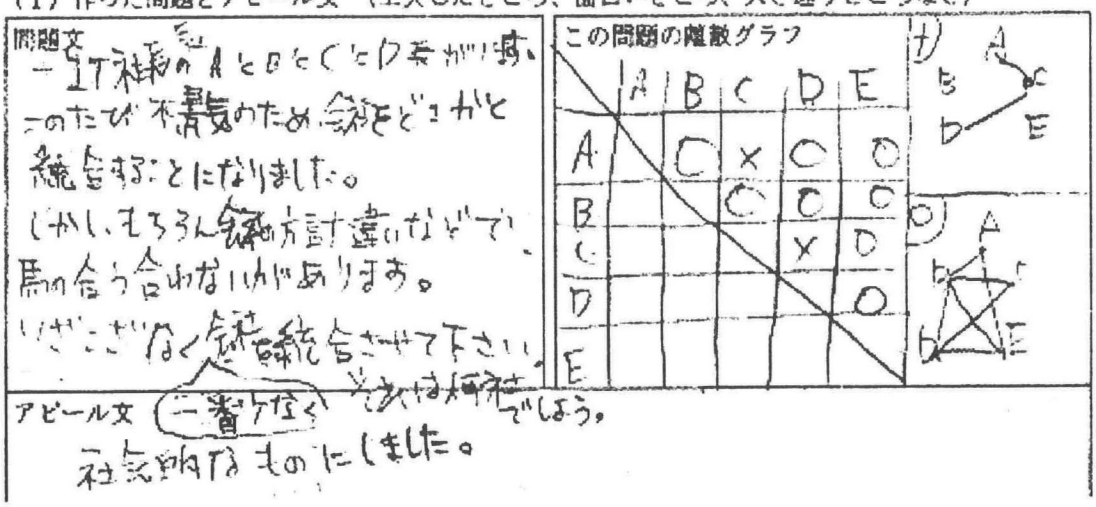
○：原問題と異なる場面への適用があるが、問いが同じ発想（最低を問う）の問題

（1）作った問題とアピール文　（工夫したところ、面白いところ、人と違うところなど）

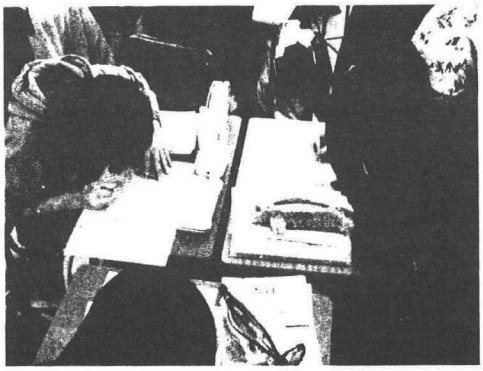


集団下校時に来るお母さんのお迎え人数をなるべく少なくしたいという問題である。とても身近な問題をよく発想できたと思う。こんな問題解決にも使えるのかと筆者も感心した。

（1）作った問題とアピール文　（工夫したところ、面白いところ、人と違うところなど）



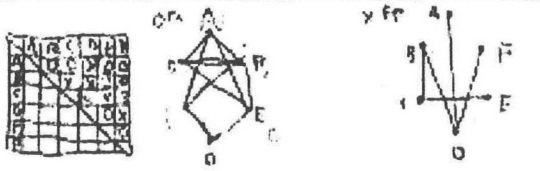
この問題にはクラスの生徒たちが一応に感動していた。最近の会社統合はよくニュースにもなり生徒たちの関心も高いところである。そうした身近な話題ではあるが自分には手の届かない事例にも離散グラフが使えることに感動したようである。一斉への発表も最初の方だったためか、これに影響を受けた修正問題がいくつかあった。



（ウ）修正後の問題で「◎」評価を受けた問題

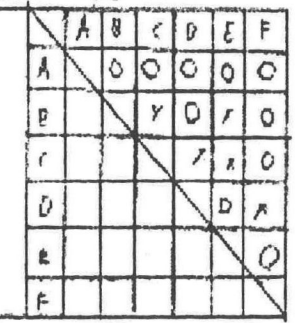
◎：原問題と異なる場面への適用があり、問いも発想に飛躍がある問題

（3）コメントや友だちの問題を見て、問題をつくり直し、どこを修正したか書こう。

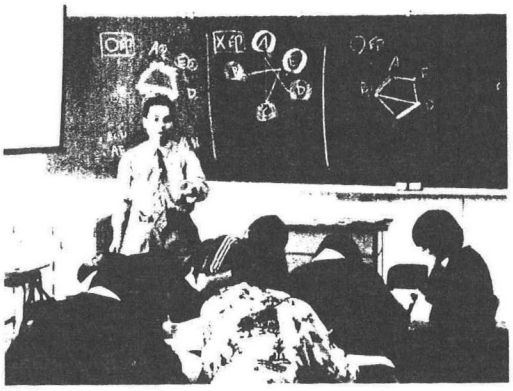
つくり直した問題	
めいろの宝さがしゲームで おなじ道を通らないで、宝までたどりつくには最高何通りのいき方があるか。	
修正を意識した部分	

修正後である。最初の問題では○であったが、ここでは一筆書きの要素も加わり、問いも「最高」に変わっている。

（3）コメントや友だちの問題を見て、問題をつくり直し、どこを修正したか書こう。

つくり直した問題	
・6人の人達と旅行ツアーに行きます。その6つの人(6ヶ所)。 初めて会った人(×ヶ所)があります。ツアーでとっても仲良し部屋は 2人部屋と3つです。 知り合いの同士で 部屋にとまる時の組み合わせ 例をあげてください。*部屋にはめるの組み合わせ すべての部屋を使うものとします。	
修正を意識した部分	
・最初から書かせてしめたらどうするかな…と思って	

修正後である。最初の問題では○であった。場面を修学旅行にした場合、互いの好き嫌いを○×に表現していたが、友だち関係が○と×だけしかないことに疑問を持ち、○×が自然に起こる場面を考えた。そして不特定多数が集まる旅行ツアーならば、知り合いであるかどうかを○×という２種類だけの表現になっても不自然でない。そして部屋数を最高で３部屋と決めてから、相部屋となる組合せをあげていくことを問題にしている。



（エ）修正後の問題で「○」評価を受けた問題

（3）コメントや友だちの問題を見て、問題をつくり直し、どこを修正したか書こう。

つくり直した問題

ケーキ買いに行きます。ケーキ(A-F)を組み合わせて
1000円以内(○ETC)と
1000円以上(×ETC)とがあります。
1000円以内の組合せは最低何種類できますか。

	A	B	C	D	E	F
A		×	○	×	×	○
B			×	○	○	○
C				○	×	×
D					○	×
E						×
F						

修正を意識した部分

1000円以上，以内にして可能性を広げた。

この問題は修正後である。修正前は同じ場面で５００円としていた。どれを買おうか迷ったときに使えると考えているようだ。

ただこれも２種類の関係で１０００円以内が分かっているだけで、３，４種類買った場合のことは分からないので、問題としては不備がある。

５－２．情意面からの授業評価

５－２－１．授業感想文の実際

（4）今日気に入った問題と授業の感想

IT社長の問題

自分でも問題を作れることが分かった。
友達のを見てみていろんな考え方で問題を作れることがわかりました。

（4）今日気に入った問題と授業の感想

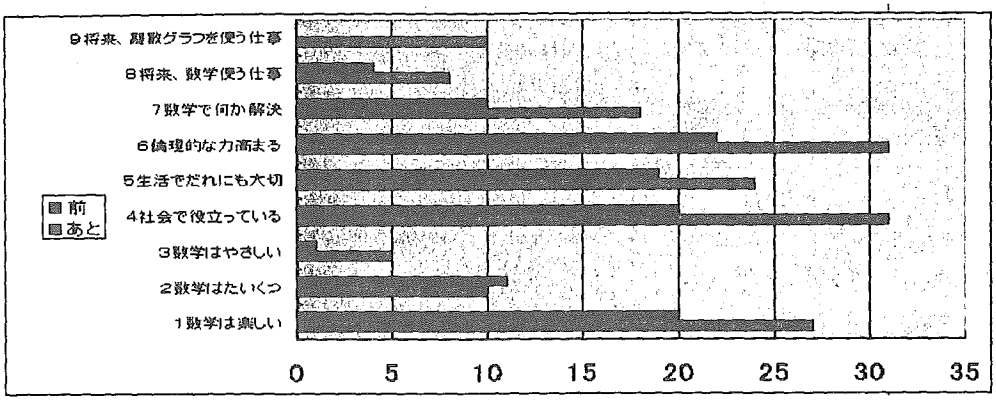
さっきの問題がすごいと思った♡
考えかないしグラフをコつを使って解くってことがスゴイ!!!
やっと、連立グラフが分かるようになりました。
問題を自分で考えて作っていうのが大変だったけどいろいろ使えそうで、
たのしかったナ?!

問題づくりをすること自体がはじめての生徒たちだった。与えられた問題を解く子とが当然だった彼らだが、自ら問題をつくれたことに感動していた。学んだ知識の生かし方が分かり、友だちが問題を味わえる力をつけていたということだろう。筆者も通常ならば類題を与えて授業を進めていたところだと思うが、これだけの力をつけている生徒たちをきちんと評価し適切に導く責任の重さを感じた。

5－2－2．ＴＩＭＳＳアンケートによる調査の単元前後での認識の変化

今回は８時間（７つの題材）の指導を行ったが、その前後で行った調査の結果である。

	1数学は楽しい	2数学はたいくつ	3数学はやさしい	4社会で役立っている	5生活でだれにも大切	6論理的な力高まる	7数学で何か解決	8将来、数学使う仕事	9将来、離散グラフを使う仕事
前	20	11	1	20	19	22	10	4	
あと	27	10	5	31	24	31	18	8	10



各項目とも改善が見られる。特に「４番数学は社会で役立っている」に対する改善が顕著である。また「６番論理的な力高まる」という反応が高い。離散グラフは数式などはほとんど使わないが、理由を考えさせたり、場面が変わっても見方が変わらないことなどを経験することで、論理的な力は高められることが分かった。そして離散グラフの８時間だけの実践であったが、一応に数学に対する認識が改善されたことはとても喜ばしいことである。

６．考察

６－１．グループ学習による問題づくりとその評価について

それまでに得た見方や考え方を、身近な問題の解決に適用し問題をつくることができていた。中には問題に矛盾をもっているものや、より高度な知識を使わないと解けないものもあったが、問題をつくること自体はじめての生徒たちが、４時間程度の授業でこれ程に多様な問題をつくれることが分かった。改めて離散グラフの可能性を感じるとともに、生徒たちの感想文からも自信につながる記述を見ることができたことはとてもうれしかった。

問題をつくって終わりにするのではなく、一斉の中で取り上げ、原問題からどのように発展させているかを共有することができた。これによって他の生徒にもよい動機づけを与え、またよい問題とはどのようなものか、どんな点に着目して考えたらよいのかなどを理解させることができた。

６－２．情意面の評価について

授業後の感想を見ると、生徒たちは大変さを感じながらも問題がつくれたことに自信をもち、また有用性を感じていたことがよく分かった。また指導前後の比較を見ると、離散グラフの学習を通して、数学に対する認識の改善も図れたことが分かった。

これらの評価は教員が直ちに自分たちの指導を反省し改善することにつながるため、さらに継続的な調査を行う必要があると考えている。

7．まとめと今後の課題

本研究では離散グラフの評価において、次のような示唆が得られた。

●評価の対象を、活動面と情意面の２つ面からみることはとても有意義である。

●評価の方法としては活動面についてはグループ学習を通した問題づくりが有効であり、情意面については生徒質問紙使って行い、授業の前後や単元の前後で比較することが有効である。

●評価規準はそれが授業のねらいであり、各項目の達成度は３段階の水準に分類して評価することが現実的で望ましいだろう。

●問題づくりによって評価するものは活動や議論の過程や結果であるため、そのきっかけをつくるための環境整備がとても重要である。

具体的には適切な問題を選ぶこととグループでの学習時間を十分とることである。

離散グラフの教材には多くの可能性を感じる。しかしそれは活動や議論が十分にできたときの結果であり、これを知識伝達だけで終わらせるならば５分で終わってしまう。そうした配慮事項や授業形態の工夫などをどう普及させていったらよいかが課題である。

【補足資料１．本時の授業展開】

●本時のねらい

・問題づくりに興味をもち、他者のつくった問題のよさに気づく。（関）
・離散グラフの見方・考え方を他の場面に適用できる。（考）
・離散グラフを他の場面に当てはめて表現し利用できる。（表）
・他の場面で使われている離散グラフの意味を理解することができる。（知）

●授業の展開

段階 時間	学習の流れと主な発問	予想される生徒の反応	留意点 評価（○）
復習課題1	１．（復習）食べ合わせ問題 食べ合わせを意識し最低何種類の料理を作ればよいでしょうか？作る料理の数と食材の組合せを決めてください。	・○印と×印どちらに注目したらよいのだろう。 ・○印に注目したグラフが四角形になった。どう処理すればよかったかな。	・課題把握ができず興味を失っていないか
個人周囲追究 １０分	○印に注目したグラフ　×印に注目したグラフ 組合せ方は（ＢＣＤ，ＡＥ）最低２種類の料理が必要 なぜ、□ＡＢＣＤは１組として考えないの？	・ＡＤ、ＢＥの食べ合わせが悪いから	・前時で分からなかった生徒、□でいいとこだわった生徒を当てて理解を図る ○離散グラフを他の場面で表現し利用できる（表）
導入課題2	２．上のような離散グラフを使って解く、似た問題をつくってみよう。 グループで発表して解き合ってもらいますが、きちんと自分の問題をアピールしてください。	・何もアピールすることがない。 ・工夫したこと書けばいいの？ ・どこを変えたかでもいい？	・解けない問題であってもよいことを伝える ○問題づくりに興味をもてるか（関）
グループ活動 ２０分	ではグループ（３，４人）をつくって順番に発表してください。他の人はそれを聞いて解いてみて、コメントと評価をしてあげてください。 後でグループの代表作を決めてもらいます。よりおもしろい問題に変えてもいいです。	・自分とは違うなあ。 ・そんな問題もＯＫなんだ。 ・この問題はおもしろいな。つまらないな。 ・代表の問題はこれをもっと改良したものにしよう。	・問題に対する話し合いは円滑か。 ○離散グラフの見方考え方を他の場面に適用できる（考）
グループ個人 ５分	コメントや友だちの問題を見て、自分の問題をつくり直してください。 修正点も書いてください。	・思ったより人に伝えることは難しいな。 ・問題の条件が不十分だ。 ・解ける問題にするには ・おもしろいってそういうことか。	・自らを振り返る活動になっているか。 ○他者のつくった問題のよさに気づく（関）
全体 １０分	いくつかのグループからおもしろい問題を発表。（授業者による選定、自信作の立候補） 問題だけでなく、アピール文をしっかり伝えること。	・もっとおもしろい問題があった。 ・そんな工夫もあるのか。 ・私の方がおもしろい。	○他の場面で使われている離散グラフの意味を理解することができる（知）
まとめ ５分	発表された問題の中で一番気に入った問題の選定。 授業の感想を書いてください。	・一番は●●だ。	・成就感が生まれているか。

【補足資料２．本時前後の授業内容】

今回の単元目標を「離散グラフを利用して、身近な事象を考察したり他者への論理的な説明を通して離散グラフのよさを認識し、数学に対する興味・関心を一層高めることができる」こととした。

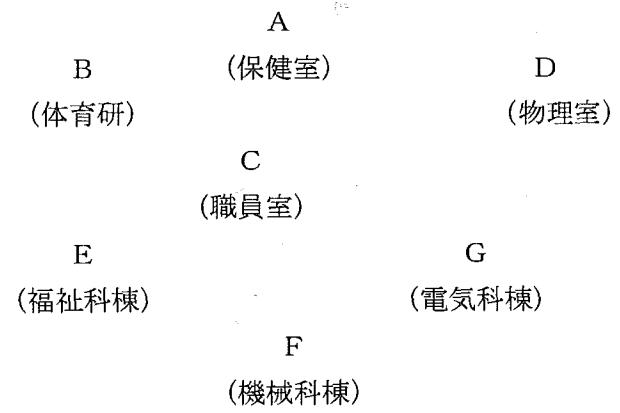
●１時限目（離散グラフの発見：ワークシートＮｏ．１）

【問題１：最短路問題】[*1]

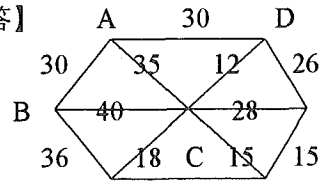
あなたは生徒会の役員になりました。

Ｃ（職員室）で印刷をしてから、Ａ～Ｇ（各研究室）に資料を配付して、またＣ（職員室）へ戻ってきます。どのようなコースで回れば最短時間（秒）になるでしょうか。

	A	B	C	D	E	F	G
A		30	35	30	33	35	45
B			40	43	36	42	60
C				12	18	15	28
D					28	24	26
E						15	29
F							15
G							



【解答】



すべての時間を記入すると左図よりも多くの線分が引かれることになるが他は最短ではないことに気づくだろう。あとはＣから外周へ向かう出入り口をみつけ

Ｃ→Ｄ→Ａ→Ｂ→Ｅ→Ｆ→Ｇ→Ｃ

という経路で、１６６秒が最短時間となる。

①ね ら い：離散グラフを自ら考え出し、そのよさに気づく。最短になる理由を説明できる。

②授業方法：３，４人でグループをつくり、互いの離散グラフを比較し説明しあう。

③考　　察：授業が混乱してしまった。設定した経路の時間よりも、生徒がよく通る抜け道の方が短かったため、表の時間を見ずに経験的に答えを出していた。

その後問題を修正したが、自分たちの経験的な発想が優先してしまい、それが最短路であるという理由を考えるときにも、図（離散グラフ）を生かそうとする動機は生まれなかった。ただ各点を線で結んだ図はあったので、それが離散グラフの図であることを伝えたが、生徒にとってその必要性はほとんどなかったと思う。

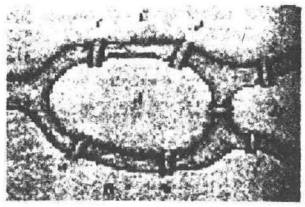
*1 西村圭一「「グラフ」の学習指導に関する研究－自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当てて－」、長尾篤志・景山三平・長崎栄三『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』、国立教育政策研究所、pp.231-261

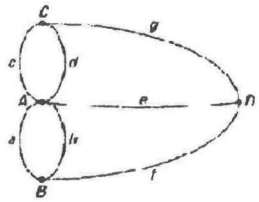
●１～２時限目（離散グラフの利用：ワークシートＮｏ．２）

ケーニヒスベルグの橋問題では一筆書きができるのか。

【問題２：一筆書き問題】

ケーニヒスベルクの町には、右図のような川が流れ、
７本の橋がかかっている。
この橋をすべて渡って、出発地点に戻ってくることはできるか？
ただし、同じ橋を２回以上渡ってはいけない。





【解答】　地図のまま追究するのではなく、左図のような離散グラフにすることで、見通しのよい解答が得やすくなる。
奇点が４ヶ所あることで、できないことを説明する。

①ね ら い：周囲との会話の中から、場面をグラフ化しさらによい離散グラフを知る。
離散グラフの見方・考え方を知り、一筆書きの条件を理解する。

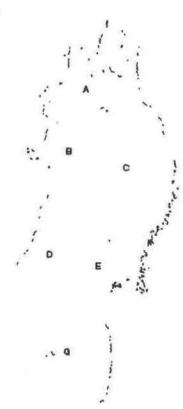
②授業方法：随時周囲との会話を促し、互いに比較することでよりよい離散グラフをつくったり、その見方を説明し合う場面をつくった。

③考　　察：好評だった。ゲーム的な感覚を持ったようで、とても集中して取り組めていた。
一筆書き可能かを考えさせる図を各自でつくらせたが、いろいろな図が出されてとても盛り上がった。問題をつくる（１本増やすだけでもよい）という意味が理解でき、またどんな問題がよりおもしろいのかも共有できた。

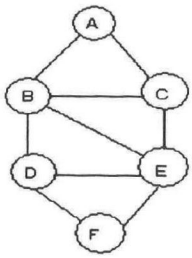
●２～３時限目（離散グラフの利用（解法１つ）：ワークシートＮｏ．３）

【問題３：地図の塗り分け問題】

東北地区などの白地図がある。
隣同士の県が同じ色にならないように塗り分けるとき、
最低何色あればよいでしょう。



【解法１】



【答え】
最低３色

①ね ら い：地図をグラフ化を通して、点と線を何に対応させればよいかを理解する。
また辺の両端を同色にしないというグラフの見方を習熟する。

②授業方法：随時周囲との会話を促し、互いに比較することでよりよいグラフをつくったり、その見方を説明し合う場面をつくった。

③考　　察：好評だった。関東甲信越のグラフ化では点の数が多くとても大変だったようである。しかし集中力をもって最後まで取り組めた。授業で得たグラフの見方や使い方を他の問題解決にも反映させることができていた。

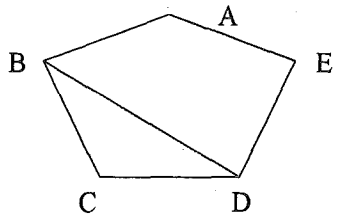
●３～４時限目（離散グラフの利用（解法２つ）：ワークシートＮｏ．４）

【問題４：食べ合わせ問題】

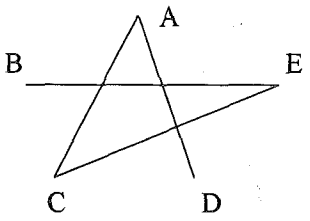
食材Ａ～Ｆを使って献立を考えますが、食べ合わせのよしあしがあるようです。
作る料理の数はなるべく少なくして、別々の人に食べてもらう。最低何種類の料理をつくればよいでしょう。
作る料理の数と食材の組合せを決めてください。

	A	B	C	D	E	F
A		○	×	○	○	×
B			○	×	×	×
C				×	○	○
D					×	○
E						○
F						

【解法１】○印に注目した場合の離散グラフ



【解法２】×印に注目した場合の離散グラフ



【答え】・作る料理の数　：最低２種類
・食材の組合せ例：①（A，E）と（B，C，D）　②（A，B）と（C，D，E）

①ね ら い：問題場面の見方によって離散グラフが２種類できることに気づく。
そのとき点と辺がそれぞれ何を表すかを理解し、離散グラフの利用方法を習得する。
周囲との会話の中から答えに対して筋道を立てて説明することができる。

②授業方法：周囲との会話の中から、互いのグラフを比較し説明しあう。
○印と×印に注目した場合の２種類のグラフを比較し、その作り方や使い方を理解させる。

③考　　察：○印に注目した離散グラフの見方や考え方について活発な議論が起きた。

当初×印に注目する生徒が多いと予想した。それは×印に注目してつくる離散グラフの利用方法が前時と同じだからということだったが、実際には調理できる関係に関心が高まり○印に注目する離散グラフがほとんどだった。しかしそれをどのような見方や考え方で利用したらよいのかが分からず、手が止まってしまっていた。

そこで×印で考えている生徒の離散グラフを紹介し答えを出した。その後再び○印の離散グラフに戻り、どのような見方や考え方で利用したらよいのかを学んだ。その際、□ＡＢＤＥの存在から、この４種類の食材を一緒にしてよいと考える生徒がいたため、それの賛否を問いながら進めることができ、クラスが盛り上がった。４食材とも線でつながっているという主張だったが、ＢＥ，ＡＤ間の組合せがよくないことを友だち同士の発言によって気づかせることができ、クラス全体で理解を深めることができた。

【問題４】の解決のあと、問題づくりに向けて次のような問題を与えた。

【問題５：動物園の問題】

動物園にはいろいろな動物Ａ～Ｆがいますが、一緒の檻に入れてはいけない動物たち（×印）と一緒の檻に入れてもよい動物たち（○印）の関係があります。これらの関係が右表の通りです。

檻の数をなるべく少なくしたいのですが、最低いくつあればうまく分けられるでしょうか？

	A	B	C	D	E	F
A		○	×	○	○	×
B			○	×	×	×
C				×	○	○
D					×	○
E						○
F						

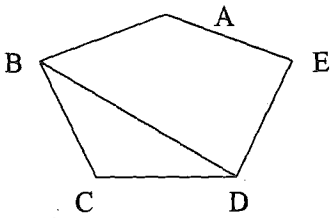
【問題６：薬品庫の問題】

理科室の薬品棚にはいろいろな薬品Ａ～Ｆがありますが、地震などで瓶が割れ、混ぜ合わさると危険な薬品（×印）と、混ぜ合わせても危険でない薬品（○印）の関係があります。

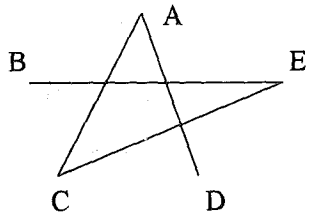
これらの関係が右表の通りです。

薬品庫をなるべく少なくしたいのですが、最低いくつあればうまく分けられるでしょうか？

【解法１】○印に注目した場合の離散グラフ



【解法２】×印に注目した場合の離散グラフ



【問題５の答え】

・作る檻の数：最低２種類

・動物の組合せ例：①（A，E）と（B，C，D）　②（A，B）と（C，D，E）

【問題６の答え】

・用意する薬品庫の数：最低２種類

・薬の組合せ例：①（A，E）と（B，C，D）　②（A，B）と（C，D，E）

①ねらい：同じ表と同じ離散グラフであっても、違う場面設定が可能であることを示し、問題づくりの事例は身近に存在することが理解できる。

●５時限目（問題づくり：ワークシートＮｏ．５）・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（本時）

【問題７：問題づくり】

前時の食べ合わせ問題を参考に、離散グラフを使って解く似た問題をつくってみよう。

●６時限目（問題づくりの続き：ワークシート同じ）

【問題８：つくった問題の披露と解決】

グループごとにつくられた問題と修正された問題を解きなさい。

①ねらい：前時と同じ

②授業方法：各自がつくった問題にグループからコメントをもらう。
また授業者からクラスに紹介された問題も参考にしながら、自作問題を修正していく。
グループ発表の前後でつくられた問題を比較する。

③考　　察：他者のつくった問題を知ることで、いろいろな発想に気づきどんな問題がよいのかが理解できていったようである。さらにグループによって話し合う機会が増えたことで、自分の修正箇所に気づきやすくなったと思う。

●７時限目（ネットワークの利用：ワークシートＮｏ．６）

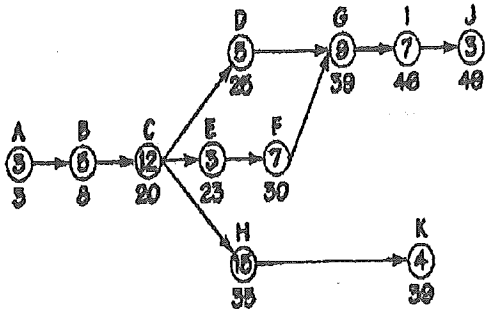
【問題９：最短日数の問題】

家を建てる際の段取りが右表のようになっている。それぞれ順番に進めていくと１０３日かかってしまう。

より効率的な作業手順を考えるために離散グラフをつくり最短日数を求めなさい。

手　順	日数	事前に済ますこと
A家を設計する	3	特になし
B基礎打ち	5	A
C柱を立てる	12	B
D水道の配管	5	C
E電気配線	3	C
F冷暖房の設置	7	E
G断熱材・壁処理	9	D，F
H外装	15	C
I内装	7	G
J じゅうたん	3	I
K庭つくり	4	H

【解答】



左図のような離散グラフをつくり、仕事の全体像をつかむ。並行して進められる仕事を数え上げないように足していくと最短日数が得られる。

つまり　Ａ＋Ｂ＋Ｃ＋Ｅ＋Ｆ＋Ｇ＋Ｉ＋Ｊ
＝３＋５＋１２＋３＋７＋９＋７＋３
＝４９日

となり、１０３日－４９日＝５４日短縮できる。

①ね ら い：数値の入った離散グラフ（ネットワーク）の見方・考え方を理解する。
自分にとってどう活かせるか考えることができる。

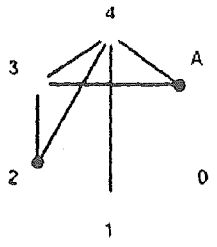
②授業方法：周囲と相談することを促し、適切な離散グラフ作図できるようにする。
最短日数をだす計算方法について、疑問をもたせ議論のきっかけをつくる。

③考・　察：最短日数を出す計算では、小さい方ではなく大きい方の数字を足していくことになる。これに疑問をもつ生徒の質問を取り上げ全体追究の課題にした。つまりＧの９日をＤまでの２５日に足すのか、Ｆまでの３０日に足すのかである。こうした議論のきっかけをつくることで、離散グラフに対する見方・考え方がより深められた。

●８時限目（離散グラフによる問題解決：ワークシートＮｏ．７）

【問題 10：握手問題】

Ａさんは、夫人同伴でパーティーに出席しました。そこにはほかに２組の夫婦が出席していました。合計６人の間で、握手が交わされました。どの人も、自分の同伴者とは握手せず、また同じ人と２度以上は握手をしませんでした。握手が交わされたあと、Ａさんは、彼の奥さんを含めた各人に、何回握手したかとたずねたところ、どの人も異なる回数を答えました。
さて、Ａさんの奥さんは何回握手をしたでしょうか？



【解答】

問題の場面を左図のような離散グラフに表現することで、追究しやすくなる。数字は握手した回数を表すので、夫婦関係が特定されることになる。つまり４－０，３－１である。残ったのはＡさんと２であり、したがってＡさんの奥さんは２回握手したことになる。

①ね ら い：問題文を適切な離散グラフに表現できる。
Ａさんの奥さんを特定していく過程において、論理的な追究姿勢を養う。

②授業方法：周囲と相談することを促し、適切な離散グラフ作図できるようにする。
奥さんを特定する理由を何人かに説明させ、その不備や矛盾を指摘することで議論のきっかけをつくった。

③考　　察：特定する理由を敢えて板書せず、各自で記述させた。論理的な記述はなかなか困難であったが、予想外にあきらめる生徒も少なく取り組むことができた。

【補足資料３．授業研究会の記録】

（１）日時　平成１８年１２月１日（金）１４：２５～１６：３０

（２）参加者

長尾	篤志	国立教育政策研究所・研究リーダー
正田	実	国立教育政策研究所・名誉所員
国宗	進	静岡大学教育学部・教授
萩原	季弘	静岡県立沼津東高等学校・教諭
高橋	広明	千葉県立松戸六実高等学校・教諭
上久保	智博	長野県野沢北高等学校・教諭
杉浦	一弥	長野県上田千曲高等学校・教頭
宮島	和昭	長野県上田千曲高等学校・教諭
小池	隆信	長野県上田千曲高等学校・教諭
北澤	晃	長野県上田千曲高等学校・講師（離散講座３クラス担当）
横澤	克彦	長野県上田千曲高等学校・教諭（離散講座４クラス担当）

（３）授業研究会の記録

●評価基準について

授業前に検討した評価基準は次のようなものであった。

◎：違う場面で、関係の変更を意識した問題
　例えば、地図の塗り分け，同じ檻に入れられる動物，混合危険な薬品など
○：違う場面で、個数の変更を意識した問題
　同じ（料理）場面でも、食べ合わせの良し悪し（関係）の変更を意識した問題
△：同じ（料理）場面でも、食材数（個数）の変更を意識した問題

（質問１）しかし、△を食材の個数が変化した場合としてるが、食材の個数が変化すれば同時に○×の関係も変わり、○に評価することとの違いが分からなくなってしまうのではないか。

（筆者）これについては、授業後に評価基準を修正し、ワークシートを点検した。

（質問２）△に評価される食材数（個数）の変更を意識した生徒であっても、それだけで何種類も問題をつくった場合はどう評価するのか。

（筆者）今回の授業ではいなかったが、生徒の反応を見て基準を変えることも必要だと思う。

●評価方法について

（質問３）単元目標にある「グラフ表現のよさを認識した」ことの評価はどのように行うのか。

（筆者）離散グラフを使って解く問題をつくったことで、既習の見方・考え方がどう生かされ、どんな有用感をもてたかが評価できると思う。

●授業形態について

（質問４）グループ活動や問題づくりという授業形態は、離散グラフだからできるのか。既存の単元では無理なのか。

（質問５）問題づくりはいつもやるのか。

（筆者）前単元は三角比だった。鋭角三角形で確認した公式を、鈍角にした場合での問題づくりをさせたが単に角度を鋭角から鈍角にしただけだった。身近な事象の解決に利用するような問題はつくられなかった。

（意見１）離散グラフと三角比では問題づくりのしやすさの違いもあるだろう。

●テストについて

（意見２）この単元のあとはテストはやらないんでしょ。活動を主にするとテストにしなくてもよいのだろうと思う。

●問題文について

（意見３）「離散グラフに置き換えて考えよ」は「離散グラフで表現せよ」が適切ではないか。

●現実感について

（質問６）数学的に破綻している問題があった。２つ買ったら５００円を超える関係が分かっていて、５００円以内に収める組合せ問題だったが、３つの組合せも可能になっていた。

（質問７）人間関係を○×だけでなく○△×で表現している生徒がいた。この場合のグラフはどうなるのか。

（筆者）問題づくりを始めからあまり制約した状態でやらせたくなかった。成立していない問題については、出てきた都度考えようと思っていた。

（意見４）食材が記号（Ａ～Ｆ）であったため生徒はそれをまねしていた。それぞれの固有名詞で問題をつくったら、より現実感を持って成り立たないものは除いたかも知れない。

●問題づくりのあとの授業

（意見５）問題づくりとその後の手当には１時間じゃ無理。でもそれについて議論することはとてもよい。

（意見６）我々はクローズドな問題を好むが、活動を中心とした授業では、オープンな問題でよいのだという評価をしないといかん。もちろん課題はあるが、可能性はあるように思う。

（意見７）こういう工夫（問題づくり）を現場の先生にしてもらいたいんだけど、題材にしても授業の仕方にしても。教科書にあると教科書通りになってしまう。そこが問題だ。

今日はいろんな所に使えるよができればよいのでよかった。

（意見８）今回の授業を受けた生徒が、また三角比のような従来の内容になったとき、またこれまでと同じような指導に戻ってしまっては困る。

●グラフ表現することのメリット

（意見９）○×の生データで考えていたら分からないが、生データをグラフに表すと捉えやすくなる。それを理解させられれば今日は上出来。それで場面を変えられればそれでよい。適応範囲が広がったことになる。自分たちにも使えそうな気になる。

（意見 10）グラフは全体を見せている。

●学習環境

（意見 11）教室の場所と人数にゆとりがない。だいたい２０人ぐらいでやれればよかった。

（意見 12）時間。最初復習に２０分かけていた。あとを３０分でやれは無理な話。

先生が待てない。指示が多い。１５分でしゃべり始めちゃった。先生がグループの問題を提示発表させていたが、本当は生徒が出てきて、発表し合うとよい。

●位置づけ

（意見 13）今回の実践は千曲高校でのものとしてもちろん位置づけはできるが、国レベルでの論議にはしていかないのか。各校がこうした授業をしてくれればよいが。

（意見 14）専門科のある学校ではこうした内容も入れて問題づくりなどさせ、また従来の数学に戻ったときもよい影響が出るようならよいが、進学校でやったら５分で終わってしまう。

（意見 15）可能性はとても感じるが、難しい問題もいっぱいある。学習指導要領の書き方が１つでなく、こういう授業方法もあるよという書き方もできれば変わるかも知れないが。

離散数学で論証を学ぶ

萩原　季弘
静岡県立沼津東高等学校

【要約】　高校数学に離散数数学を導入する方法として、「集合と論理」で離散数学のいくつかの話題を取り扱うことが考えられる。その例のひとつとして本校の理数科の生徒を対象に実施した特別授業の内容を報告する。ここでは離散数学そのものを学ぶと言うことよりも、論理を学ぶ上での題材として離散数学の問題を活用するということに主眼をおいた。離散数学には、存在証明に用いる鳩の巣原理や、論理的思考を養うためのよい題材がいくつかある。そのような題材を扱うことで、すぐに公式やパターン化することに陥りがちな思考から脱却し、考えることの重要性を再確認し、自分の考えを言葉で説明することの大切さを感じることができるような授業を目指した。

1. はじめに

離散数学は一般に数式化や公式化が難しく、アルゴリズムの発見による構成的な方法や、背理法、数学的帰納法などの言葉による説明と理解が重要な数学である。特に、高度に抽象化することまで踏み込まなければいくつかの操作や図で理解することも可能で、その理解を他者と共有するためには、言葉が大切な意味を持つ。また、身近なことを題材とした問題が多いことも特徴である。

「集合と論理」にそのような離散数学の問題を取り入れることで、「論理」をより身近なものとしてとらえ、さらに論理の本質を理解することができるようになることを期待して今回の授業を実践した。

最初に、教科書に入れる際の大まかな構成をイメージし、その流れにそって授業の内容を組み立てた。ただし、4 時間という限られた時間であったので、ひとつひとつをかなり圧縮せざるを得なかった。実際の授業計画ではひとつひとつのテーマに時間をかけて、さらに内容も２～３倍にふくらまして行うとよいだろう。

2. 構想

数学 A で行う集合と論証について、次の内容を取り扱うことを想定した。

１．集合　……集合の記号、要素、包含関係
２．命題　……逆、裏、対偶、必要条件、十分条件
３．証明の方法
　(1)　対偶法
　(2)　背理法
　(3)　数学的帰納法
４．証明に用いられる原理
　(1)　二値化
　(2)　鳩の巣原理

1，2は従来の内容とほぼ同じである。

3はいろいろな証明法について学ぶ。(1)(2)は従来と同じである。(3)は従来数列で扱っていたものである。数列の知識を前提とせず、数式を前面に出すことも避ける。

4では証明によく用いられる原理として二値化と鳩の巣原理を取り上げる。いずれも離散数学でよく扱われる原理である。

離散数学としての直接の項目は4のみであるが、1～3においても離散数学の話題を取り入れ全体の流れを一貫性のあるものにする。

今回の授業では1,2および3の(1)(2)は既習であることを前提に組み立てた。ただし、2については言葉で表現することを意識して確認の時間を1時間とった。同じことに留意して3の(1)(2)についての題材を選んだ。数式以外の題材を扱い言葉で説明することを強調した。

次に4の(1)(2)では全称命題でなく存在命題に関する論証を学ぶ。二値化では偶奇性に注目し、「～ができない」「～が存在しない」などの命題を証明する。こういう証明しにくいことの証明の導入として、偶奇性に注目した証明は分かりやすく、適切であると考えた。その後鳩の巣原理を学ぶ。具体的に求めるのでなく存在のみを保障するという原理だが、易しい例で慣れたら多少高度なことも扱う。今回はいずれも正方形の格子状の図形に関する問題を題材にして多少なりとも統一性を持たせた。

最後に数学的帰納法を扱う。通常は数列で扱っているが、数列で扱うと数式の変形やn、kの文字の扱いなどに意識が向いて、数学的帰納法の理解に至らないこともある。数式を（できるだけ）使わない例で数学的帰納法の考え方を学べるようにした。高校で学ぶいろいろな証明法についてこの項目でまとめて学んで整理するということも考えた。

今回は取り上げなかったが、同じ目的でグラフ理論の題材を扱うことも有効ではないかと思う。グラフ理論は以上の項目をすべて網羅して流れのある授業を構成することができると期待できる。本報告所にもいくつかの事例があるので参照されたい。

3. 授業計画

(1)　日時　2006年8月22日(火)～25日(金)

(2)　対象　1年生理数科生徒17名

※授業で教科書の内容(集合と命題)について学習済み

(3)　内容

上記の「構想」に沿って2～5の内容を各1時間実施した。(各70分)

1時間目　命題

2時間目　対偶・背理法

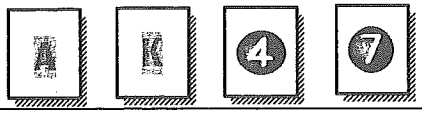
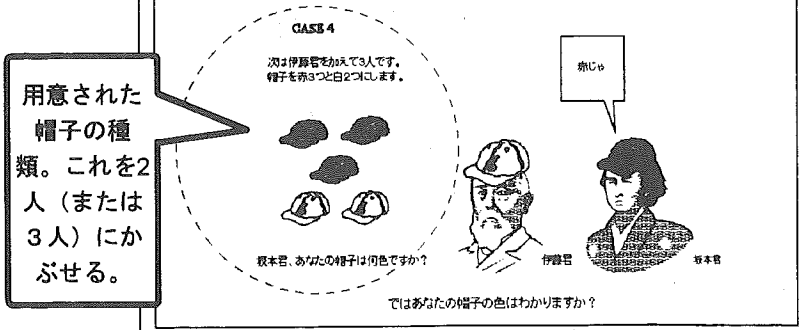
3時間目　偶奇性・鳩の巣原理

4時間目　数学的帰納法

4. 授業の記録(1) [2～3時間目]

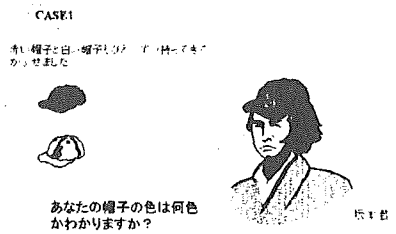
■2 時間目(対偶法・背理法)

本時の目標：証明の重要な考え方としての対偶法、背理法について理解し、問題文の意味を的確にとらえ、対偶法・背理法を使って説明ができる。(数学的な見方・考え方、興味・関心・態度)

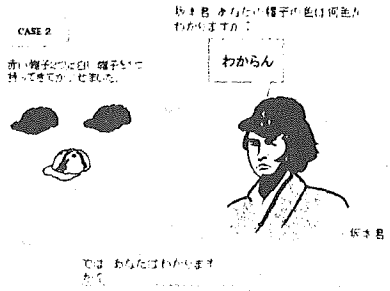
指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《導入》 ・対偶の確認	**問１** ののちゃんが風邪をひいているときはのぼるは風邪をひいていません。ではのぼるが風邪をひいているときはののちゃんが風邪をひいていないといえるでしょうか。	・ワークシート配布 ・常識に引きずられないで命題の真偽を判別する。
《展開１》 ・命題の真偽は対偶を考えることで明確になることも多いことを確認する。	**問２** ４枚のカードがある。どのカードも片面には数字が、もう片面にはアルファベットが書いてある。このとき、次のルールが成り立っていることを確認するためにはどのカードを裏返して確認すればよいか。確認するカードは複数でもよい。 ルール **「母音の裏には必ず偶数がかいてある。」**  ＜生徒の反応＞ ・Ａを確認する。 ・Ａと４を確認する。 ・ＡとＫを確認する。 ・Ａと７を確認する。	・分かった生徒を指名。理由も説明させる。
	問３ 練習問題 次の(1)，(2)の命題の真偽を述べよ。ただし，a，bは実数とする。 (1) 任意の正の数aに対して$a<b$が成り立つならば，$a^2<b^2$である。 (2) 適当な正の数aに対して$a<b$が成り立つならば$a^2<b^2$または$a^2=b^2$である。	実際は課題とした
《展開２》 ・背理法の考え方を学ぶ	**問４** 赤い帽子か白い帽子をかぶせる。自分の帽子の色は見えないが、他の人の帽子は見える、という状況である。次の各々の場合にあなたが何色の帽子をかぶっているか推理しなさい。  用意された帽子の種類。これを2人（または3人）にかぶせる。 ○各自で考える。わかったら近くで説明し合う。	・CASE １～４は指名して説明させる。 ・CASE ５はわかったら近くの生徒とお互いに説明し合う。 ***見方・考え方***

《まとめ》	**問５**　$\sqrt{6}$　が無理数であることを用いて $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　が無理数であることを示せ。 **問６**　素数が無数に存在することを示せ。 **問７**　平面上に白い点と黒い点がそれぞれ１０個ずつ勝手な位置に配置されている。ただし、どの三点も同一直線上にはない。このとき、黒点、白点を両端とする１０本の線が引けて、かつどの二本も交差しないような結び方が必ずあることを示しなさい。 ○感想記入	・最低ひとつはできるように挑戦させる。時間がなければレポート 課題

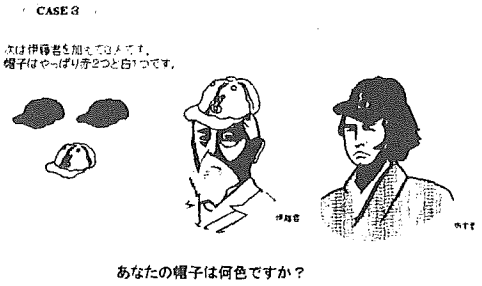
(注)帽子の問題は次の通り。いずれも「あなた=(生徒)」がかぶっている帽子の色を答える。



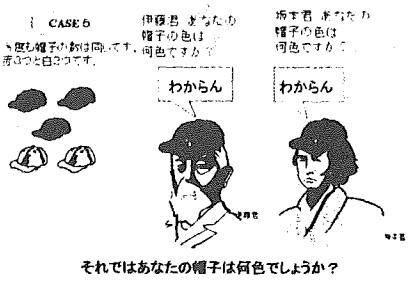
CASE1：帽子は赤１つ、白１つ。　もう一人(坂本君)は赤をかぶっているのが見える。



CASE ２：帽子は赤２つ白１つ。坂本君は赤。坂本君に自分の帽子の色を聞くと「わからない」



CASE3：帽子は赤２つ白１つ。伊藤君は白、坂本君は赤をかぶっているのが見える。

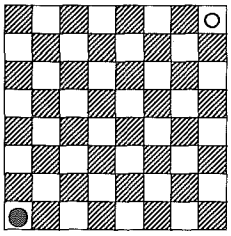
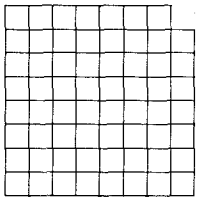
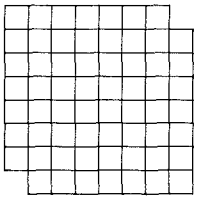
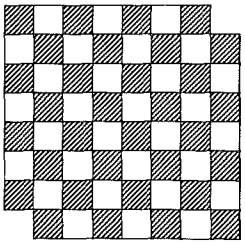


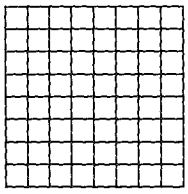
CASE5：帽子は赤３つ白２つ。伊藤・坂本両方が赤をかぶっているのが見える。最初に伊藤君に自分の帽子の色を聞くと「わからない」。次に坂本君に同じ質問をするとやっぱり「わからない」

CASE4：帽子は赤３つ白２つ。伊藤君は白、坂本君は赤をかぶっているのが見える。坂本君に自分がかぶっている帽子の色を聞くと「赤」と答えた。

■3時間目(偶奇性・鳩の巣原理)

本時の目標：偶奇性に注目することや、鳩の巣原理を用いることで存在命題の証明の方法を学び、自分の言葉で説明できるようにする。(見方・考え方、関心・意欲・態度)

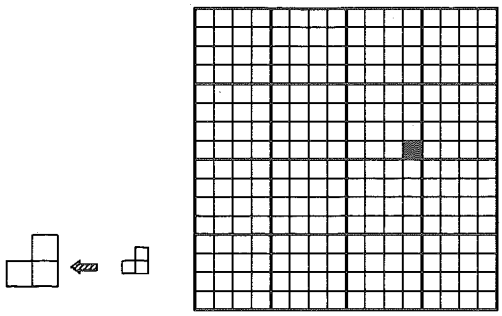
指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《導入》 ・偶数奇数に注目する	**問1**　下の図において●は図の位置から出発し縦または横にひとつマスずつ移動する。 (1) 9回動いて元の位置に戻ることはできるか？戻れるならば具体的な動き方をひとつ示せ。 (2) ○の位置まで、すべてのマスを通過して行くことができないことを示せ。 	・ワークシート配布 ・言葉で説明する。
《展開1》 ・偶奇性に注目して「～できない」このと証明を考える	**問2**　(1)図Aの図形を下図のタイルを重ねることなく覆い尽くすことはできるだろうか。できなければその理由を。できれば覆い方を示しなさい。 図A タイル  (2)　(1)と同じことを図Bの図形で考えなさい。 図B  ・(1)は奇数だからできない ・(2)はなかなか思いつかない  ※このように白黒で塗り分け、白黒の色の個数に注目する。タイルはどう置いても白黒ひとつずつ埋めるので不可能である。	・ヒントを与える。 ・言葉で説明させる。塗り分けた図が説明にも有効であることに気づかせる。

《展開２》 ・鳩の巣原理について考える	**問３** 沼津市には自分と同じ髪の毛の本数を持つ人が、少なくとも２人いる。ただし、沼津市の人口を２０万人、人間の髪の毛の本数は高々１６万本とする。また、静岡県には自分と同じ髪の毛の本数を持つ人が少なくとも 24 人いる。ただし静岡県の人口は 380 万人とする。 わかったら近くの生徒どうしで説明し合う。 ○全体で説明 ○鳩の巣原理について説明と確認 **原理１「n＋１ 羽の鳩が，n個の巣箱に入れると２つ以上の鳩が入る巣箱が少なくとも１つ存在する。」** **原理２「kn＋１（k≧１）羽の鳩とn個の巣箱があり，すべての鳩がこれらの巣箱のいずれかに入れば，巣箱のうちのどれかにはk+1羽以上の鳩が同居していることになる。」**	・説明が出来たところを見計らって全体で発表してもらう。 ***見方・考え方***
・いくつかの練習をしてみる	**問３** １から１９９９までの１０００個の奇数がある。この中から、５０１個の奇数をどのように選んでも必ず、その５０１個の中に、２つの相異なる数で、和が、2000 となるものが存在する。 **問４** １辺の長さ２の正方形の中に５点があるとき、その中に距離が高々$\sqrt{2}$ である２つの点が存在する。 **問５** ８×８のマス目のグラフ用紙にできるだけ多くのマス目を緑に塗ろうと思う。ただし、下図のような形のマス目を勝手に取り出したとき、少なくとも１つのマス目は緑色に塗られないようにする。最大いくつのマス目を塗ることになるだろうか。 この形は９０°ごと回転させたものも考える。  ８×８のマス目 **記録（２）の項参照**	・いずれもできたら説明してもらう。 **実際は課題とした**
《まとめ》	○感想記入	・レポート問題提示

■4時間目(数学的帰納法)

本時の目標：証明の方法として、数学的帰納法の考え方を導き、その有用性を理解する。

（関心・意欲・態度、見方・考え方）

指導のねらい	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
《展開１》 ・帰納法の構造を考える 記録（２）の項参照 ・数学的帰納法について学ぶ	**課題**　１６×１６のマス目のグラフ用紙からどのマス目（正方形）のひとつを切り取っても残りのグラフ用紙を下図のようなタイルで埋め尽くすことができることを示しなさい。  ○２×２の場合はどうか ・できる。明らか。 ○３×３の場合はどうか ・できない。一マスとると８なので３で割り切れない。 ○４×４の場合はどうか ・対称性を考えた解答（例えば左上の２×２に切り取ったマスがある場合を説明してあとは対称性から可能だとする） ○次は何を考えるか？ ・６×６ ・８×８ ○８×８ではどうか ・前の結果を用い、４×４を４つ作る方法 ・Ｌ字型の相似形を作る方法 **数学的帰納法とは？** 自然数ｎに関する命題Ｐ(n)に対して （Ⅰ）　Ｐ(1)が真 （Ⅱ）Ｐ(n)が真ならばＰ(n+1)も真 この２段階ですべてのｎに対してＰ(n)が真であることを導く証明方法	・ワークシート配布 ・言葉で説明する。 ・まずシンプルな場合を考えて見る。 ・この考え方が重要になるので説明をしっかりさせる。 ・６×６は３×３と同じ理由ですぐに排除できるが、重要なことは前の結果を次に利用するということであることを強調する。 ・よりシンプルに次に適用できるのはどちらか考えさせる。 ・この方法は 16 × 16 に止まらずどこまでも出来ることに気づかせる。
《展開２》 ・数学的帰納法の問題に挑戦する。	**問１**　ｎ＞３ である自然数ｎに対して、３つの鋭角をもつ凸多角形（へこみがない多角形）が存在することを示しなしなさい。	・出来なければレポートとする。 課題

	問２　「ハノイの塔」について次のことを示しなさい。 (1)　円盤をすべて別の棒に移すことは可能である。 (2)　2^n-1回あれば移すことは可能である。 (3)　2^n-1回より少ない数では移すことは不可能である。 ※「ハノイの塔」については授業で説明します。	課題
《まとめ》	○感想記入	

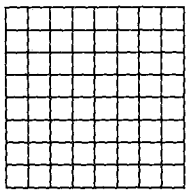
5. 授業記録(2)

授業の中で印象的な場面を掲載する。正確に記録したものではないが、実際の授業の大まかな流れを感じていただけるようまとめた。

□3 時間目

問５　８×８のマス目のグラフ用紙にできるだけ多くのマス目を緑に塗ろうと思う。ただし、下図のような形のマス目を勝手に取り出したとき、少なくとも１つのマス目は緑色に塗られないようにする。最大いくつのマス目を塗ることになるだろうか。

この形(Ｌ字ブロック)は
９０°ごと回転させたものも考える。



８×８のマス目

生徒１　塗り方はわかりました。
教師　　では前に出て書いてください
生徒１　(右図１のように塗る)
　(…しばらく自分で眺めて)
生徒１　あ、もっと単純に塗れるかな！？
　　(右図２のように訂正)
教師　　なるほど、単純だね。シンプルだ。
　　でも、これで最大だってどうしてわかるかな？
生徒１　図１でも２でもあとひとつ塗ると緑色のＬ字ブロックができてしまう。
教師　　うん、でもそれはこの塗り方だからかもしれない。他の塗り方でも必ずそうなるのかな？
　　(生徒しばらく考える)

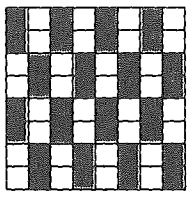


図１

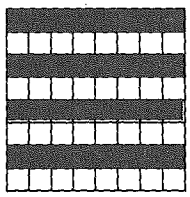


図２

教師　　２×２のマスで考えてみようか。全部緑色のＬ字ブロックができてしまうということだから…

生徒２　（２×２の）４マスのうち３つを塗ると（全部緑の）Ｌ字ができてしまう！

生徒３　鳩の巣、鳩の巣！

教師　　ちょっと整理して言ってください。

生徒３　２×２のマスが全部で１６個できる。３３個のマスを塗るとどこかの２×２マスには必ず３つ以上緑のマスができる。つまりＬ字ができてしまうので、３２が限界。

教師　　その通り。そして条件を満たす塗り方はこの（図１、２）塗り方で示したので３２が最大だと言うことがわかったね。

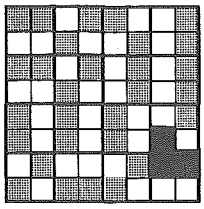
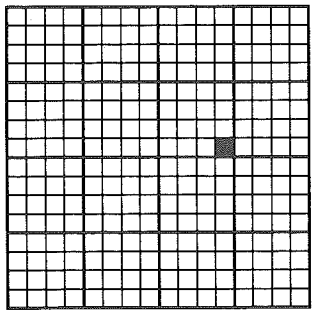


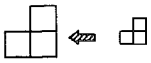
図３
３２マスだがＬ字ができる場合

２×２マスのブロックが４×４＝１６個でき、各々に２つずつ塗る。
その塗り方もふたつの２×２マスにＬ字ができないようにしなければならない。

□4時間目

課題　１６×１６のマス目のグラフ用紙からどのマス目（正方形）のひとつを切り取っても残りのグラフ用紙を下図のようなタイルで埋め尽くすことができることを示しなさい。





教師　　いきなりでは難しいので２×２で始めよう。
２×２から一マス切り取るとＬ字のタイルそのものなのでこれは問題ないね。
次の４×４で考えてみよう。

図４

生徒１　（右図５を示す）

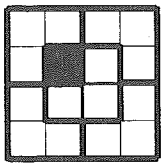


図５

教師　　うまくできたね。次は８×８で考えよう。

生徒２　６×６でないの？

教師　　６×６ってできるの？

生徒２　…３６から１引くと３で割れないからできない。

教師　　じゃあ８×８は？

生徒２　８×８－１＝６３。３で割れる。

教師　　３で割れてもできないのがあるからそれだけじゃあ十分でないね。ほんとにできるかやってみて。

（かなり時間がかかる）

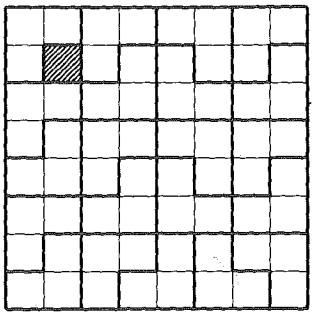


図６

生徒３　（右図６のように考える）

教師　　やっとできたね。

どうやってやったのかな？

小さいサイズで考えたことが生きてる？

生徒３　あんまり関係ない。

教師　　次に１６×１６を考えるためにも、４×４での考えをうまく拡張できる敷き詰め方はない？４×４から一マス除いたものは埋められたんだよね。

生徒４　（相似形のＬ字型をつくろうとする（注）。なかなかできない。）

教師　　なるほど。もう一歩だね。

生徒５　４×４を４つ作る！

４つのブロックで１つ欠けているところは大丈夫。証明済み。のこり３つはひとつずつまたがるようにＬ字をおくと、残りは４×４からひとつ除いたことになるのでやっぱり可能（注２）。

教師　　今の説明で次の１６×１６もうまくいくことがわかる？

生徒５　わかるわかる。ずっといける。

教師　　このようにあるところで成り立つことを使って次のところでも成り立つことが言えれば、その次もどんどん成り立つことがわかる。こういう証明の仕方を数学的帰納法といいます。

（注）　たとえば次のように構成する。

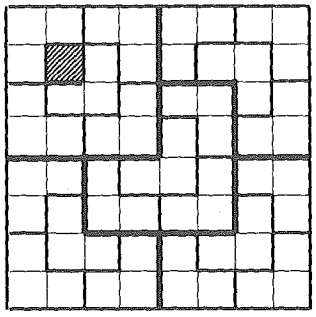


図７

左図７のように大小のＬ字型を作っていくことで埋めることができる。実際には時間不足で生徒は完成させることができなかったが、これも帰納法へと発展できる。

（注２）　下図のように説明

４×４から１つ除いたブロック

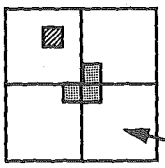


図８

このようにＬ字を置けば残り３つのブロックも４×４から１つ除いたことになる。

6. 生徒の感想

1●とても頭を使ったと思う。いろいろ面白い問題があった。格子点の問題や点と点と交わらないように結ぶ問題(2時間目・問7)は面白いと思った。

2●あたりまえのことでも、深く考えていくと難しいことなどもあって、とても面白かったです。普段の授業とはちょっと違う感じで頭の体操になりました。わからなかった問題もちゃんと考えたいです。

3●普段の授業では使わないような脳の部分を使った気がした。70分の授業で頭を使った後すごく疲れた。70分があっという間に終わってしまいとても楽しかった。証明を自分の言葉で表現することがどれだけ大変かわかった。論理力が鍛えられたような気がした。

4●数学はなぜ全くずれがなく現実世界の規則・法則・事象を表せるのかとえも不思議に思いました。もっと数学でできるいろいろなことを知りたいです。

5●帽子の問題や偶奇性の問題が面白かった。全く分からない、難しい、と思った問題でもちょっと考える方向性を変えたりアドバイスをもらったりするとパッ!!とひらめいたり、あー、と納得できたり楽しかった。

6●鳩の巣の考え方がとても興味深く面白かった。命題の真偽で仮定がちがっていたらすべて真というのには驚いた。とてもためになった。

7●3日目の問題が 1 番数学っぽくて(?)難しかった。「やり方を知らないとできない」という数学の定理を思いっきり見せられた気分だった。帽子の問題の伊藤が笑った。1 日の命題は何やら不満が残るものだった。

8●ひらめきが必要な問題が結構あったので難しかった。帰納法は図形の問題で面白いと思った。

9●今回の講義を受けてみて、論理力の不足を痛感し、改めてその大切さに気づかされた。今までは与えられた公式を使ってといった勉強方法だったが、これからはしっかり考えるくせをつけられるようにしたい。

10●普段の授業では使わないような考え方をしてクイズのような感じで楽しめました。こういうことも数学って言うんだなということもありました。数学って広いなとつくづく感じました。

11●頭を使う問題をやったのでとても疲れたが解けた時、達成感があった。公式のみを使う数学に慣れるのではなくその原理を知ることが大切だと思う。

12●命題と証明が分かりやすかった。難しいものが多かった。

13●どれもとても面白かったです。図形の問題が好きなので帰納法は一番面白かったです。帽子の理論はとても頭を使うので(条件や新たに生まれる情報など)とても良いと思います。

14●普通の数学と違う問題や定理をやったのでついて行けない部分もあったし、説明をされたときは少しは納得したけど実際に問題を解くときに使うのは難しいと思う。でも楽しくできたのはよかった。

(注) 6●－「仮定が違っていたらすべて真」というのは1時間目で「P ならば Q」は「P でない または P かつ Q」を扱ったことを指す。授業では「あなたがペンギンなら私はキリンだ」というような具体例で紹介した。

7●－「やり方を知らないとできない」と思うのは授業の中で自分(やともだち)が発見できたという実感が乏しかった証拠であり、授業に反省すべき点があったことを示唆する。

12●－1時間目の授業は離散数学との関連が少ないためここではふれなかった。授業者としては、日常言語と数学での用語との関連、相違点を強調しすぎて生徒に混乱を与えたという反省があったので、このように「分かりやすかった」という感想は意外であった。

7. 考察

今回は特に公開して実施した授業ではなかったので授業者と生徒の感想だけでの評価になることをお断りした上で考察を以下に述べる。

□2 時間目

・帽子の問題は生徒がおもしろがってよく考えた。

・授業ではパソコンのプレゼンソフトを用いて電子紙芝居的に展開した。

・ただし、パソコンで用意するということは授業者が意図する展開がすでに織り込まれているわけで、生徒が発見し説明するという意味が薄れる。授業ではわかった生徒に説明してもらうことが出来たが、プレゼンソフトの使用は教師誘導型に陥らないよう注意が必要であると感じた。

・課題では従来のような問題も入れた(問6　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$が無理数であることの証明)。その問題がもっとも取り組みやすく多くの生徒が取り組んだが、中には問7(白黒各10個の結線問題)に取り組んだ生徒もいた。

□3 時間目

・偶奇性に注目する問題は、不可能であることの証明としては分かりやすい題材であった。

・後半の始めは早いうちに鳩の巣原理の説明に入ってしまい講義式に近い授業展開となった。1時間にふたつの内容をいれるという欲張った授業計画によって、生徒が消化不良となってしまったことは否めない。例題も一気に難しくなりギャップがあった。離散数学も講義式に進めるとつまらない授業になるという悪い手本となってしまった。

・しかし、最後の問題(問5　正方形格子を2色で塗る条件をつけた問題)では最後に鳩の巣原理が使えたことに生徒は満足したようであった。

・生徒から条件にあう塗り方が早いうちに提案されたがそれが最大であること(それ以上塗ると条件をみたさなくなること)は鳩の巣原理を用いることでうまく説明できる。逆に鳩の巣原理からは33個のマスを塗ることができないということは示せるが、32個で可能かどうかは直接は示せない。生徒があげたような具体例をもって初めて32個が最大とわかる。このようなことは最大・最小の検討への注意を与えるとともに、必要条件・十分条件の検討にもつながることがらであり、離散数学の証明問題では特に意識されることである。

□4 時間目

・帰納法はステップを踏んで考えていった結果、生徒もよく分かったようである。一般化して次のステップへ進む方法を生徒自身で導くことができた。

・帰納法は後で数列の単元で再学習することになる。ここでは証明の記述の仕方(① n=1 を示し、② n=k で成り立つと仮定すると、 n=k+1 でも成り立つ　という2段階の形式的な記述方法)についてはふれなかった。

□全体通して

・1 時間 70 分とはいえ4時間完結の短期講座だったので結論を急ぐところもあり、全体として十分ではなかったが、それぞれをふくらませれば流れとしてはよいのではないか。

・帰納法については本当に理解できたか、今後数列を学んでもう一度帰納法にふれたとき、今回のことがどのくらい生きるかが問題である。

・この後、生徒が中学生対象に理数科の授業紹介をする機会があったが、その際にL字型ブロ

ックで埋め尽くす帰納法の問題を取り上げ中学生に説明した。時間の都合もあり中学生に考えてもらう時間はほとんどなかったが、生徒の説明も簡潔にまとまられ、参加した中学生は一様に興味を持って聞き、理解もしたようであった。中学生でもわかる内容であることが確認されたとともに、中学生に説明するためにもう一度問題を確認し、説明の方法を検討することによって、生徒の理解が格段に深まる様子が見られた。このように、自分の意見をいろいろな形で他人にわかるように説明することは時間が許す限り大いに取り入れていくとよい感じた。

・今回の授業は本校理数科の発展的な内容の授業として行った。比較的数学が得意で興味を持っている生徒が多く、上記のような問題点もあったにも関わらず生徒の反応はよかった。問題を精選し 1 題にかける時間をもう少し多くとることによって、いろいろな生徒に対応できると思われる。

・本冊子のいくつかの報告でもグループ学習のことがふれられている。この授業では明白なグループ学習は行わなかったが、一人ひとりが積極的な姿勢を持った17名という比較的少人数の集団であったので意見交換もある程度できた。しかし、この意見交換の場が生徒の考えを深める場であることを考えれば、時間をもう少しとり、効果的なグループ学習を展開することでさらに生きた授業となると思われる。

8. まとめ

離散数学の題材は、生徒の思考を公式やパターン化から自分の頭で考え組み立てていく方向へ向かわせてくれる。その点において「命題と証明」で離散数学の題材を扱うことは効果があると思われる。「命題と証明」は数学の学習の中で土台となるべきところであるが、苦手とする生徒も多い(特に必要条件十分条件)。離散数学の題材によって自分で考え、自分の言葉で表現することの大切さを認識できる。

ただし、ひとつひとつをじっくり考えるための時間の確保が必要であることは今回の授業実践の中でも改めて明らかになった。面白い話題であるが結論を急ぐと奇抜な発想で解くパズルのような印象を与えてしまうおそれもある。却って数学嫌いを生むことにもなりかねない。その意味では離散数学も万能でない。扱い方、授業展開の仕方が重要であるのは他の教材と同じである。

今回の授業構想・展開はひとつの例である。離散数学の他の題材(例えばグラフ理論など)を核として組み立てるほかに、トピック的に組み込むことで授業にふくらみをもたせるような展開も考えられる。今後さらにいろいろな実践を積み重ね、経験を交流していくことが大切である。

9. 参考文献

数学のひろば I , II	ドミトリ・フォーン他　志賀浩二他訳　(岩波書店)
赤いぼうし	野崎昭弘　安野光雅　(童話屋)
数学流生き方の再発見	秋山仁　(中公新書)
考えることの科学	市川伸一(中公新書)
だしっこ問題「論理パズル」傑作選	小野田博一(講談社ブルーバックス)
数学の証明のしかた	秋山仁(駿台文庫)

Ⅳ. 離散数学の教科書記述例

「離散グラフ」の教科書記述例に関する一考察

西村　圭一
東京学芸大学附属大泉中学校

【要約】本研究のねらいは，「離散グラフ」における教科書の記述例を示すことである。そのために，「離散グラフ」を扱うねらいやそれを実現するための授業展開を考え，それをもとに，教科書記述上の工夫について検討した。そして，離散グラフの導入に当たる節の教科書記述の１次案を作成し，実験授業を行ない，その反省をふまえ，教科書記述例を完成した。

1　研究のねらいと方法

筆者は，本研究会において，「離散グラフ」を中等教育段階に導入することを検討してきた。なぜなら，「離散グラフ」は，式や関数のグラフ等と同様，数学的処理の対象となる数学的モデルとして有効であり，また，多岐にわたる応用分野を有することから，生徒にとって学ぶ価値があると考えたからである。

実際，離散グラフを取り上げた2006年度の実践研究（西村，2006）からは，生徒の既存の数学的知識に左右されずに，数学的モデル化過程[1)]を通した問題解決が実現できること，数学の社会的有用性の感得に貢献できること，数学的に考えを伝え合う活動を促進することなどがわかった。その一方で，学習指導要領に位置づけた際に，教科書はどのように記述すればよいかが検討課題として残った。

本研究のねらいは，離散グラフの教科書の記述例を示すことである。そのために，離散グラフを扱うねらいやそれを実現するための授業展開を考え，それをもとに，教科書記述上の工夫について検討する。そして，教科書記述の１次案を作成し，実験授業を行ない，その反省をふまえ教科書記述例を完成する。

2　離散グラフの教科書の記述

（1）　離散グラフを扱うねらい

社会生活の場面や身近にある離散的な事象を、離散グラフに表して数理的に考察したり、解決の手順を的確に表現したりすることを通して、数学的な見方や考え方を豊かにするとともに、数学の有用性を感得する。

（2）　離散グラフの授業展開

離散数学の内容の授業展開における留意点として，次の点が挙げられている（景山，2006)。

① 多様で十分な思考活動時間の確保
② アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化
③ 基本的にはグループ学習形態での実施

離散グラフを扱う授業においても，この３点を重視する。

（3）教科書記述上の工夫

（2）に述べた授業展開を実現し，（1）のねらいを達成するために，教科書では，以下のような工夫をする必要があると考える。

① 導入では，生徒が解決に対する意欲をもてるように，解決の必要感のある問題を提示する。

② 解決過程では，与えられた知識を適用するだけの授業展開にならないようにするために，生徒自らが数学的概念やアルゴリズムを作り出すことに関わる問いを配置する。

③ 解決過程では，双方向の数学的コミュニケーションを行えるように，ペアで考えたり，友達と，お互いの考えを説明し合ったり，書いたものを比べたりする活動を設定する。

④ 解決後に，自分の考えを振り返ることができるよう，自分の考えを修正する活動を設定する。

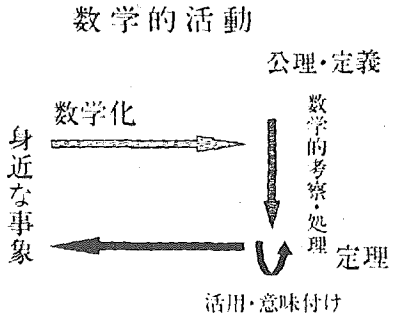
（4）「離散グラフ」の教科書記述例

本研究では，離散グラフの導入に当たる節の記述例を示す。次々ページからの記述例は，１次案をもとに実験授業を行い，その反省をふまえて修正したものである。また，実験授業を通して得られた授業展開に関する示唆を，指導上の留意点として，記述例の下に整理してある。(研究授業の指導案並びに研究協議会の記録は稿末を参照)

なお，本記述例では，「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」（文部省，1999，p. 10）に述べられている数学的活動の次の面の実現を図るようにした。

・身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動

・数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動



3　まとめと今後の課題

本研究では，離散グラフの教科書の記述例を示した。記述例の１次案を使用した中学生に対する実験授業において，生徒に期待した活動が見られたことから，本記述例は，２（2）に述べた授業展開を実現し，２（1）に述べたねらいの達成を図る上でおおむね有効だと思われる。

一方，扱った問題の「被害状況がわからないので，距離が短い道路の方が早く直せると考えて，直す道路の総距離が短くなるようにする」という条件には，現実的ではない面がある。距離が長くても被害が少なく直しやすい道路があると考えられるからである。この点は，この問題場面の限界であり，教科書の記述を通して改善するのは難しい。しかしながら，生徒は，この問題に意欲的に取り組めていた。これは，総距離が最短になる道路の選び方，すなわち，最小木を見つける手順を考えることに対する意欲と考えられる。したがって，離散グラフを，最小木を見つける手順を考えることで導入することは効果的であると考えられる。よりよい問題を開発することが今後の課題である。

注

1）数学的モデル化過程とは，図１のように図式化される一連の問題解決過程である。それは，まず現実世界の問題に単純化や理想化等の定式化を施し，数学を使いやすい問題場面に作り替える。

次に，数学的モデルを作成し，数学的作業を通して，数学的結果を得る。さらに，それを現実世界の問題に戻して，その有効さを検討する。もし必要であれば，このサイクルを繰り返す。

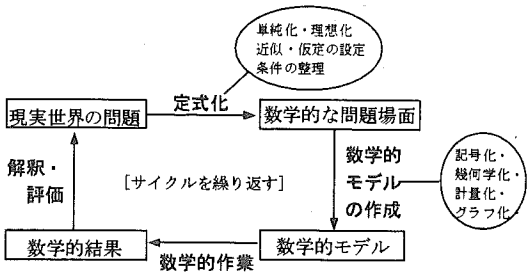


図1 数学的モデル化過程(西村, 2001)

引用・参考文献

景山三平（2006）「高等学校へ導入する離散数学の有効性について」『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書，pp. 10-15

西村圭一（2001）「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」日本数学教育学会誌『数学教育』第83巻第11号，pp. 2-12

西村圭一（2006）「「グラフ」の学習指導に関する研究－自ら考え有用性を感得する教材に焦点を当てて－」『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』国立教育政策研究所科研研究成果報告書，pp. 231-261

文部省（1999）「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」実教出版　pp. 9-11.

第○章　離散グラフ

第１節　離散グラフとその利用　3時間

○目標

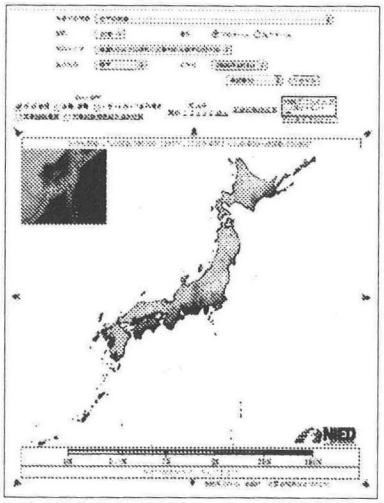
- 問題場面を離散グラフに表すよさに気づき，活用しようとする。(関心・意欲・態度)
- 具体的な問題場面を，数学化し，数学的に扱えるようにしようとする。(関心・意欲・態度)
- 離散グラフを用いて，最小木を見つけるアルゴリズムを見いだし，その背後にある考え方について考察することができる。(数学的な見方・考え方)
- 具体的な問題場面を，点と辺からなる離散グラフに表わすことができる。(表現・処理)
- アルゴリズムの意味を理解する。(知識・理解)

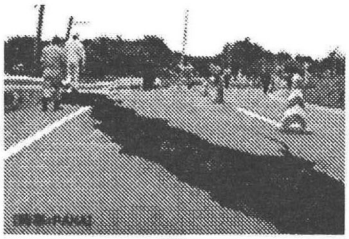
第○章　離散グラフ

第１節　離散グラフとその利用

日本は世界でも有数の地震の多い国である。地震の予知や発生時の対応について，対策が練られ続けている。例えば，防災科学研究所は，「地震ハザードステーション」のホームページで，今後，地震が起こる確率を公開している(http://www.j-shis.bosai.go.jp/j-shis/)。

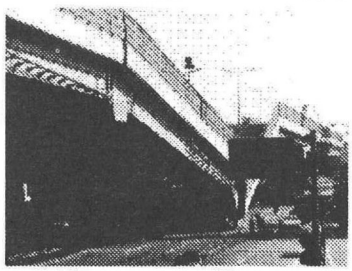
また，地震の初期微動を観測して，大きな揺れがくる前に地震警報を出すシステムも運用され始めている。





大地震が起きると，写真のように，道路が寸断されてしまうことも少なくない。防災対策本部は，主要な都市間相互の移動をいち早く可能にするために，どの道路を優先して直すかを迅速に決定しなければならない。そこで，防災対策本部は，大きな被害にあった都市がわかれば，どの道路から優先して直せばよいかをすぐ決められる手順を作っておきたい。

そのような手順を考え，実行しやすいマニュアルを作ろう。



どのような道路の選び方をするといいかな。

1　導入での留意点

過去の震災の新聞記事等を活用し，避難所に救援物資を届ける場面を想起させる。そして，救援物資の輸送には，道路の確保が求められることを押さえたい。その上で，たとえば，下の図のような位置にいる４名の生徒を都市に見立て，「各都市に食料を届けられるようにするには，どの道路を直すか」と投げかける。

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓓ

仮に，B-C 間，A-C 間，C-D 間を，この順に選んだとしよう。３番目になぜ A-B 間を選ばないのか，なぜ A-D 間や B-D 間ではなく，C-D 間としたのかを意識化することで，各都市間の移動を可能にすることを優先するという考えや短い距離の方を優先するという考えなどを引き出す。この段階では，選び方について，無理に収束させるのではなく，いろいろな考えを取り上げておきたい。その上で，次のページに進み，条件を絞るようにする。

また，「大きな被害にあった都市がわかれば，どの道路から優先して直せばよいかをすぐ決められる手順を作成する」という問題設定についても，強調しておく。

Aさんのクラスでは，次のような条件で考えることにした。 ← 2

- 救援物資が届けられるように，どの都市からもどの都市へも，他の都市を経由する場合も含めて，移動できる状態にする。
- 被害状況がわからないので，距離が短い道路の方が早く直せると考えて，直す道路の総距離が短くなるようにする。

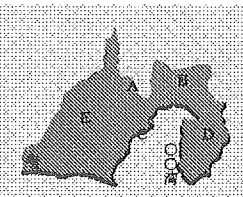
この条件で，次の Situation 1 について考えてみよう。

Situation 1

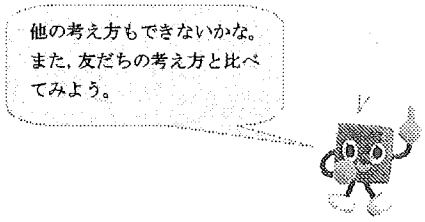
A，B，C，D，Eの5都市間で，大型車が通行できる道路は，次の7本だけで，それぞれの距離は次の通りである。

A－B間 20km，A－E間 25km，B－C間 40km，B－D間 30km，B－E間 45km，C－D間 50km，D－E間 65km

このすべての道路が寸断されたとき，直す道路の総距離が最短になる選び方を考えよう。



問1 直す道路の総距離が最短になる選び方を求めなさい。また，その選び方を，どのように考えて見つけたのかを説明しなさい。



問2 問1の選び方のとき，直す道路の総距離が最短であることを説明しなさい。

✎ 他の都市でも使えるような手順を作ろう。

Situation 2

A－G の7都市間で，大型車が通行できる道路は，次の12本だけで，それぞれの距離は次の通りである。

A－B間 25km，A－D間 42km，A－G間 52km，B－C間 50km，B－D間 35km，B－E間 26km，C－E間 38km，D－E間 40km，D－F間 28km，D－G間 32km，E－F間 36km，F－G間 30km

このすべての道路が寸断されたとき，直す道路の総距離が最短になる選び方を考えよう。

問3 直す道路の総距離が最短になる選び方を求めなさい。

2 条件について

ここでは，道路を直す労力は距離に比例していることを仮定している。ただし，「簡単に直せる道路から直していく方がよい」と考える生徒もいると予想される。教科書では，この点について，「被害状況がわからない」という設定にしている。

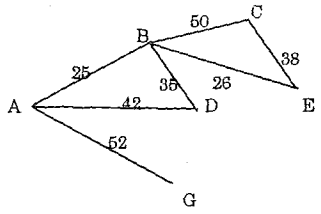
3 問1について

ペア（2人組）で解決に当たらせる。

授業では，さまざまな図を取り上げ，どのように考えたかを発表させる。都市を点，道路を辺とする離散グラフをかいた生徒がいた場合，全員に，そのよさについて考えさせるようにする。離散グラフに表す生徒がいなかった場合は，離散グラフを提示せずに，Situation 2 に進むようにする。

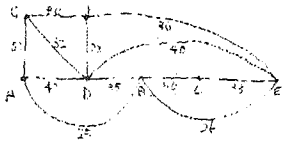
なお，各都市間の距離の大小関係を，そのまま図に表そうとする生徒がいる。この問題を解決する上で必要かどうかをていねいに議論させたい。

問4　あつしさんは，右のような図をかいて考えようとしている。
この図を完成させなさい。



問4の図では，各都市を点で，道路を線分で表している。このように，点と辺で表された図のことを**離散グラフ**または**グラフ**といい，点を**頂点**といい，頂点同士を結んでいる線分や弧を**辺**という。

問5　はるかさんは，右の離散グラフをかいて考えていた。問4でかいた離散グラフと比べて，気づいたことを挙げなさい。



問6　離散グラフを利用して，直す道路の総距離が最短になるように，直す道路を選び出す手順を考えなさい。そして，その手順を書きなさい。

ペアで話し合い，防災対策の担当者に的確に伝わる手順にしよう。

問7　次の①－④の場合について，問6で考えた手順が使えるかを調べなさい。必要であれば，手順を修正しなさい。

① A-B間 15km，A-D間 35km，A-E間 40km，B-C間 25km，B-E間 20km，C-D間 30km，C-E間 23km，D-E間 18km

② A-B間 13km，A-E間 19km，B-C間 25km，B-E間 21km，B-F間 20km，C-D間 24km，C-F間 20km，D-E間 15km，D-F間 21km，E-F間 16km

③ A-B間 33km，A-E間 15km，A-G間 27km，B-C間 36km，B-F間 27km，B-G間 9km，C-D間 9km，C-F間 18km，D-F間 15km，D-E間 27km，E-F間 24km，F-G間 12km

④ A-B間 15km，A-C間 22km，A-E間 20km，B-C間 6km，B-D間 17km，B-E間 20km，B-F間 10km，C-D間 15km，D-F間 20km，D-J間 8km，E-F間 19km，E-G間 30km，F-G間 25km，F-H間 12km，F-I間 23km，F-J間 35km，G-H間 20km，H-I間 20km，H-J間 40km，I-J間 30km

1　問4について

問3までに離散グラフに表した生徒がいなかったときのために設けた問いである。したがって，必要に応じて扱えばよい。

2　問5について

この問題を解決する上では，各都市のつながりのようすが表されていればよいこと，並びに，2つの離散グラフが同じものと見なせることを確認する。

3　問6について

この問いから，手順を文章化することに焦点を当てていく。吹き出しで示されているように，ペアで話し合い，他者に的確に伝わるようにすることを促したい。場合によっては，この後の問8で行う活動を説明しておくことも効果的である。

4　問7について

同じ距離の道路があることが，Situation1，2とは異なる。どのような場合にも使える手順にするには，同じ距離の道路があるときにどのような選択をするかを考えておかなければならないことに気づかせ，手順を再検討させる。

問8　次の(1)～(4)に答えなさい。
(1) 作成した手順を，下に書きなさい。
(2) 他のペアの手順をチェックするために，離散グラフを作り，自分の手順を試みなさい。
(3) 手順を他のペアと交換し，その手順の正しさやわかりやすさをチェックし，コメントを書きなさい。
(4) 他のペアの手順と，自分たちの手順とを比較し，気づいたことを挙げなさい。

手　順

コメント

問9　問8でのコメントや他のペアの手順との比較をふまえ，自分たちの手順を修正しなさい。

5　問8について

(2)では，都市の数や距離を決めながら，離散グラフをかく。ここまでは，与えた場合についてのみ考察してきたが，どのような場合にも使える手順を作成する上では，都市の数や距離を変えて調べていく必要がある。そのことにも，適宜，ふれておきたい。

(3)では，1つの手順を，複数のペアがチェックするようにする。このような活動を初めて経験する生徒も少なくないと思われるので，書かれているとおりに手順を実行し，過剰な解釈をしないよう注意を促す必要がある。また，コメントについても，正しさ，わかりやすさの観点から，具体的に書かせるようにする。なお，良い手順の例はクラス全体に紹介するとよい。

6　問9について

自分たちが書いた手順を客観的に振り返り，修正することは，数学的活動の大切な一面である。また，このような活動を通してこそ，生徒のアルゴリズムを作成する力を育成・伸長できると言える。十分な時間を確保したい。

ある手順に従えば必ず解決ができるとき，その手順のことを**アルゴリズム**という。

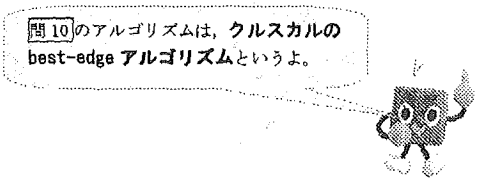
問 10　総距離が最短になるように，直す道路を選び出すアルゴリズムには，次のようなものがある。

i)　　すべての点をかく

ii) 閉路にならないような辺の中で，最短の辺を書き加える。そのような辺が複数あるときは，どれか１つを選ぶ。書き加える辺は，それ以前に書き加えた辺と連結している必要はなく，同じ長さの辺があるときは，その長さを繰り返し選んでよい。

iii) 閉路にならない辺を書き加えることができなくなるまで ii を繰り返す。

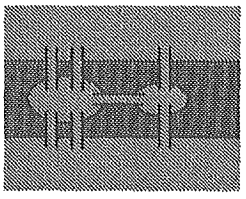
このアルゴリズムを試みなさい。また，自分たちの作成したアルゴリズムと比較しなさい。



問 11　自分たちが作成したアルゴリズムが使える問題をつくりなさい。

コラム　**ケーニヒスベルクの問題**

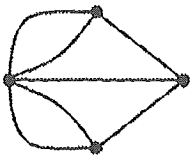
ケーニヒスベルク（現在のロシア領カリーニングラード）を流れるプレーゲル川には，市の中心地で大聖堂の建っている中州クナイプホーフ島ともう一つの大きな中洲があり，それらを中心に両岸へ，右のように７つの橋が架かっている。この７つの橋を各１度ずつ通って，元の場所に戻ってくることができるかどうか? ただし，同じ橋を２度以上通ってはならない。



1736 年，レオンハルト・オイラーは，この問題を以下のグラフに置き換えて考えた。

このグラフが一筆書き可能であれば，ケーニヒスベルクの橋を全て１度ずつ通って戻ってくるルートが存在することになる。そして，オイラーは，このグラフが一筆書きできないことを証明し，ケーニヒスベルクの問題を否定的に解決した。

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%94%BB%E5%83%8F:Konigsburg_graph.png



1　問 10 について

手順の記述の模範的な例と位置づけて，自分たちの手順の記述と比較，検討させる。また，余力のある生徒には，自分たちの考え方との共通点や相異点についても検討させたい。

なお，このアルゴリズムを覚えさせたり，適用する練習をさせたりすることは，本教材の趣旨から考えてふさわしいことではない。

2　問 11 について

自分たちが考えたアルゴリズム（手順）が使える場面を考えたり，問題をつくったりすることは，離散グラフの有用性を知るばかりでなく，自分たちの行ってきたことに対する理解を深める機会となる。さらに，生徒が作った問題を整理し，配布したりすることで，この内容に対する生徒の興味や関心を一層伸ばすことも期待できる。

また，作成した問題を見ることで，ある程度は，生徒の理解の様相を推し量ることができる。したがって，作成した問題を提出させ，評価の材料とすることも考えられる。

離散グラフ（数学B）の教科書記述例

逸見　由紀子
東京都立西高等学校

【要約】本研究のねらいは，「離散グラフ」における教科書記述例を示すことである。「離散グラフ」を「数学B」に位置づけての扱いのねらいや授業展開を考え，教科書記述を検討した。離散グラフの展開にあたる節の教科書記述例を作成し，実験授業を行い，教科書記述例の２次案を示した。

1　研究の目的と方法

私は本研究会において、離散数学における「グラフ」を高等学校段階に導入することを検討してきた。この「グラフ」を導入することは、本研究会の実践（高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の研究開発）においてもみられたように、アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアを意識化し、処理していける有用性を得ることができる。さらに多くの分野にわたる事例を取り上げて数学的にモデル化していく過程を問題解決のための方法として利用できるため、生徒が各自の興味・関心，能力・適性，進路等に応じて選択した分野の基礎的能力を習得する手助けとなるためである。これは本研究会の実践においても、生徒間においての数学的な考えを中心としたコミュニケーションの力を培う行動がみられた。これは今まで数学を得意としていない生徒にもみられる行動であった。生徒のその後の学習や職業・社会生活の基盤を形成するために役立つと考える。

本研究のねらいは、離散グラフの教科書の記述例を示すことである。離散グラフを扱うねらいやその授業展開を踏まえ、教科書記述の工夫を検討する。今後、これをもとに実験授業を行い、修正していくものである。

2　離散グラフの教科書の記述例

日常生活から広く離散的な題材を求め、離散グラフを用いて表現し考察するという見方や考え方を身につけ，不確定な事象を数量的にとらえることの有用性を認識させる。

離散グラフの単元は以下のように設定を行い（景山，2006），小単元の目標，評価規準の設定を行った。

（1）　単元

数学B　　離散数学

イ　いろいろな離散グラフ

（ア）　　完全グラフ

（イ）　　２部グラフ

（ウ）　　平面グラフ

（2）　小単元「イ　いろいろな離散グラフ」の目標

具体的な事象の考察などを通して，離散グラフについて理解し，不確定な事象を数量的にとらえることの有用性を認識するとともに，事象を数学的に考察し処理できるようにする。

（3）　評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
グラフに関心をもつとともに，それらを問題の解決に活用しようとする。	数学的な見方や考え方を身に付け，離散的な事象についてグラフを用いて考察することができる。	グラフを用いて離散的な事象を表現し，目的に応じて数学的に処理することができる。	グラフにおける基本的な概念，原理・法則，用語・記号などを理解し，基礎的な知識を身に付けている。

（4）教科書記述上の工夫

離散グラフを「数学B」で取り扱う留意点として，以下の工夫が必要であると考えた。

① 導入では，生徒が問題解決に積極的に参加できるように，問題の設定の容易さに加え，日常生活での活用が期待できるものを提示する。

② 問題解決の過程では，試行錯誤の場面を多く設定し，コミュニケーションを取ったり，その様子を言葉などで表現したりすることを示唆していく。

③ 問題解決後には，自分の考えを振り返り，これをよりよく修正する場面を設定する。

次ページからは教科書記述例を示した。

3 まとめと今後の課題

本研究では，離散グラフの教科書の記述例を示し，その指導例を示した。記述例を高等学校２年生に対する実験授業において，前述した期待する活動が見られた。グラフによる表記に加え，主にことばでの表現を行うことを通して，２に述べた目標の達成が行われた。

「数学B」での取り扱いのため，性質を考察に知識としてまとめながらも，知識を適用するだけでない問題提示・授業展開を常に心がける必要がある。

「順列・組み合わせ」の問題と重なる部分があるため，その既存の知識を引き出しながら，グラフの利便性・有用性を促す教材開発が今後の課題である。

引用・参考文献

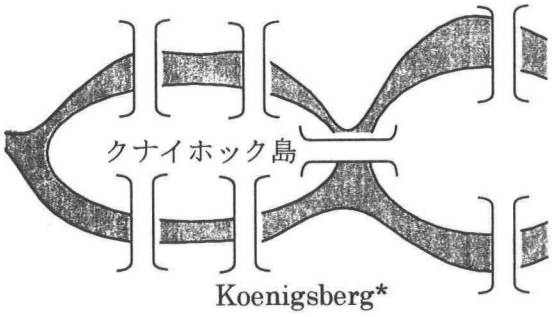
1　中教審 初等中等教育と高等教育との接続の改善について（中間報告）
第２章　初等中等教育の役割（1999/11 答申等）

2　評価規準の作成，評価方法の工夫改善のための参考資料（高等学校）－評価規準，評価方法等の研究開発（報告）－（2004 年 6 月 18 日）

3　長尾篤・景山三平・長崎栄三編（2006）『高等学校におおける離散数学を中心とした新

第１章
離散グラフとその応用

Q　同じ橋を２度渡らないで，
全部の橋を渡ることができるか？



*現在のカリーニングラード（Kalininingrad）

レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler，1707年４月15日 － 1783年９月18日）は数学者・物理学者・天文学者（天体物理学者）である。少なくとも数学に関しては 18 世紀最大・最高の数学者である。スイスのバーゼルに生まれ、現在のロシアのサンクト・ペテルブルクで亡くなった。歴史上最も多産な数学者であったといわれている。グラフ理論は、1736年、「ケーニヒスベルクの問題」に対してオイラーが解法を示したのが起源とされる。オイラーはこの問題をグラフに置き換え、このグラフが一筆書きできないことを証明し、解決した。

さらにオイラーは、一筆書きが可能になる場合の必要十分条件を求めた。これにちなんで、一筆書きのできるグラフをオイラーグラフという。グラフ理論の先駆けとなった。

出典：フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』

〔本章の指導目標〕

離散グラフは，自然科学や社会科学などの分野にとどまらず，社会生活の場面にも多く取り扱われているものである。

そこで，これら身近にある離散構造に関する事象を数学化し処理する考えの理解を深めるとともに，グラフを用いた構造表現の有用性を認識し，それらをいろいろな事象の考察に生かすことができるようにする。このことを通して，数学的表現力や数学的思考力を伸ばすとともに，数学に対する興味・関心を一層高める。（景山，2006）

以上のことから，次の項目を指導目標とする。

・グラフに関心をもつとともに，それらを問題の解決に活用しようとする。（関心・意欲・態度）

・数学的な見方や考え方を身に付け，離散的な事象についてグラフを用いて考察することができる。（数学的な見方や考え方）

・グラフを用いて離散的な事象を表現し，目的に応じて数学的に処理することができる。（表現・処理）

則，用語・記号などを理解し，基礎的な知識を身に付けている。（知識・理解）

〔導入での留意点〕

一筆書きのようで違う「ケーニヒスベルクの問題」に触れ，道順を調べる見方や考え方，方法には「順列」で学んだ見方や考え方，方法とは違うものがあるという認識を持たせ，興味・関心を

・グラフにおける基本的な概念，原理・法　　促す。

第１章
離散グラフの考えとその表現
第２節いろいろな離散グラフ
1　完全グラフ
指導事項
　完全グラフの定義とその表現
　完全グラフの点と辺の数
用語と記号
　完全グラフ，K_n
〔解説〕
注意事項
　「握手問題」を通して，完全グラフを理解させる。
完全グラフ
　すべての頂点 o が辺――によって他のすべての頂点 o と連結しているグラフを、完全グラフという。全員が互いに握手をすることは完全グラフで表され，その様子が辺によって表現される。

§1　離散グラフの考えとその表現

第２節　いろいろな離散グラフ

1　完全グラフ

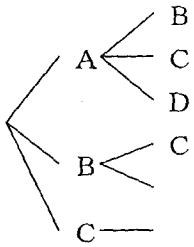
ある会合に集まった４人で，互いに握手をした．全員が握手をするには全部で何回握手が行われるかを考えよう．

●「数学Ａ」で学んだように樹形図や組み合わせの数を利用してみよう．

やってみよう

〔樹形図を利用〕

握手する４人をそれぞれ A,B,C,D として握手をする組み合わせを、樹形図を用いて表してみよう。



樹形図から全部で
____回握手をすれば
よい。

〔組合せの数を利用〕

樹形図を利用したことから，組合せの数で表してみる。

握手をする回数は、
　４人から握手をする２人を選ぶ選び方の数
と考える。

組合せの数は，

したがって，全部で６回握手が行われれば、全員が握手する。

やってみよう

４人が互いに握手をする回数を調べる。これは「順列・組合せ」の既習事項を利用することができる。グラフを利用することのよさに気づくための準備である。

〔樹形図を利用〕

樹形図を利用すると，すべての場合が把握しやすいことから，辞書式に並べてもれなく数える。

〔組合せの数を利用〕

組合せの考えを使って，組合せの数で表すこともできる。

(?) いよいよ握手の様子をグラフで表してみる。

グラフを用いて表すことにより，次のようなよさがある。

1 握手の回数をその変の数を数えることで求められる。

2 人を o で，握手をするもの同士を辺―― で結ぶことによって，握手をする様子を表す。

特に２のよさを意識できるよう強調する。

? o の数が４つのグラフは、辺を交差させずにグラフ表現ができる。

! グラフから４人の握手の回数を調べることは，四角形の辺と対角線の本数を求めることと同値であった。これは「組み合わせ」で既習の事項を確認する。

グラフを利用して、もっと 握手の様子 を表現できないか。

● **グラフを利用しよう.**

グラフは頂点 o と辺―― で表現するので，まずそれぞれが何を表すのかを決めることから始めよう.

〔グラフを利用〕

４人をそれぞれ o で表し，握手をする者同士を――で結んぶことによって，握手をする者同士の関係を表す.

例えば，A と B が握手をすることを，

A―― B

で表す.

４人全員が握手をするときをグラフで右の図のように表した。辺の数を数えると６本になっている。これは，４人が互いに握手をするには全部で６回行われることを表している.

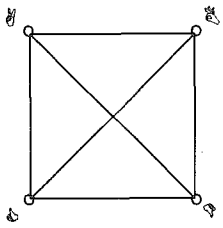


図１

? 握手の様子は図１でも見て取れるが，交差している辺を交差しないようには解消できないか。

Aさんを図の中央にしてはどうだろう。

! 握手する回数は，グラフで表した四角形の辺と対角線の本数となった。「四角形の辺と対角線の本数を求める問題」と同じだ。

問1 ４人が互いに握手をし終えた頃，もう一人会合に加わった。全員が握手をするには，あと何回握手が行われるか.

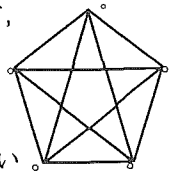
また，５人が握手をする様子をグラフで表せ。

問1 樹形図、組み合わせの考えを用いて考えることを再度させ、グラフを利用するよさを確認させる。

新しく加わった５番目の人が，既にいる４人と握手をすればよいので，その回数は４。

グラフで表すと図１に１点加えて，右の図のように表される。

これと同型な形での表現には右のように整形した方が見やすい。



ことを促す。※点が５つの完全グラフを K_5 とよぶ。

（問１つづき）

完全グラフでは，頂点の数が４のときの辺の数は６本であったが，ここで頂点が１つ増えると，前の４つの頂点と新しい頂点を結ぶ辺が４つ増えることが分かった。

この事実を，完全グラフを定義してから考察する。

完全グラフの定義

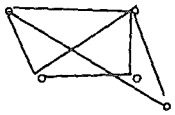
ここでは，頂点 ∘ が何を表し，辺 ― が何を表すかを表現して利用できることの有用性を強調する。

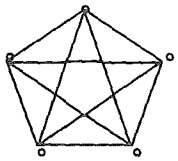
K_n という分類・表記については次ページに載せた。完全グラフをまとめる程度に利用する。

完全グラフ

離散グラフの中でも，すべての頂点 ∘ が辺 ―― によって，他のすべての頂点 ∘ と連結しているグラフを、完全グラフという。

問２　次のグラフＧは完全グラフか．その理由も述べよ．

（１）　 

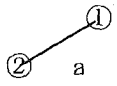
（２）　 

完全グラフの頂点と辺の数を調べよう。

頂点がｎ個の完全グラフにおける辺の総数はいくつだろうか。つまり、これらの頂点が他の頂点と必ず１辺で連結するために必要な辺の総数を数えてみよう。

そこで**問1**で考えたように，順に頂点の数を一つずつ増やした完全グラフの辺の増える様子を調べてみよう。

・頂点が２個の場合



頂点と辺に番号をつけておく。

頂点①は頂点②と連結するためには辺ａがあればよい。頂点②は辺１によってすでに頂点①と連結している。

したがって、頂点の数が２の場合、この頂点を連結する辺は１本あれば完全グラフとなる。

(?)　完全グラフで表される事象を数理的に考察する。頂点の数が増えることで，その頂点とそれまでの頂点すべてとの関係が生まれることが，辺の増加数で表現されていることを認識させる。

グラフの有用性については，握手問題などで認識した。

ここでは頂点の数を順次増やしながら辺の数の変化や総数を探求することで，生徒一人一人が離散構造に関する事象を数学化し，処理する考えの理解を深めさせる。

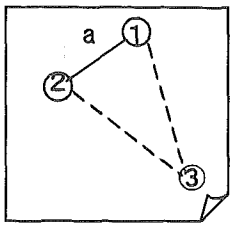
問1で，完全グラフでは，頂点の数が４のときの辺の数は６本であったが，ここで頂点が１つ増えると，前の４つの頂点と新しい頂点を結ぶ辺が４つ増えることが分かった。

ここで再確認しながら、完全グラフの点と辺の関係まとめていく。

さらに完全グラフの分類 K_1，K_2，K_3，K_4，・・・の考察につなげていく。

・頂点が３個の場合

図のように，連結されている頂点が２個の場合に頂点③を



１つ加えることを考える.

新しく増えた頂点③も、頂点①，②と連結するように左の

図に新しい辺を書き加えよう。

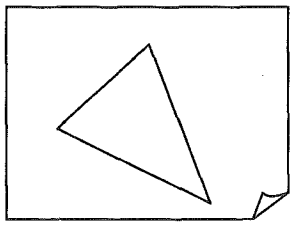
新しい頂点③と頂点①，②を連結する辺２本を加えればよい。

頂点の数が３の場合、この頂点を連結する辺の総数は、辺ａに２本の辺を加えた、１＋２＝３本あれば完全グラフとなる。

・頂点が４個の場合

さらに新しい頂点④を加えることを考える.

新しく増えた頂点④を書き入れて、辺も書き加えよう。



(考え方)

とりあえずどこかに頂点④をおいて，他の頂点と結んでみよう.

頂点の数が４の場合、この頂点を連結する辺の総数は、頂点の数が３の場合の３本に，新しい頂点④と頂点①，②，③を連結する辺３本辺を加えた、３＋３＝６本あれば完全グラフとなる。

・頂点が５個の場合

頂点が４個の場合と同様にして考えると，新しい頂点が増えたところに，新しい辺が発生する。その数は，新しい頂点が新しくない頂点４個とそれぞれつながるための辺で４本である。

したがって，辺の総数が６＋４＝１０本あれば完全グラフとなる。

・ 頂点が３個の場合

頂点が２個の完全グラフに点を一つ増やすと考えて，２個の点とつながる辺を２本加えると頂点が３個の場合の完全グラフになる。

・ 頂点が４の場合

頂点が３個の完全グラフに点を一つ増やすと考えて，３個の点とつながる辺を３本加えると頂点が４個の場合の完全グラフになる。

・ 頂点が５個の場合
頂点が４個の完全グラフに点を一つ増やすと考えて，４個の点とつながる辺を４本加えると頂点が５個の場合の完全グラフになる。

以上より，完全グラフの頂点と辺の数の関係は
頂点の数がｎのときの辺の数は
（辺の数）
＝１＋２＋３＋…
＋（ｎ－１）
＝ ｎ（ｎ－１）／２
（ｎ＝１，２，３，…）
と表現できた。

これはn個の頂点から辺を作る2個を選ぶ組み合わせの数 ${}_nC_2$ と一致する。

以上のことから辺の数は，頂点の数が１増えるごとに，それまでの点すべてと結ぶ辺が必要になる。すなわち，（点の総数）－１だけ増えることが分かった。

完全グラフの頂点と辺の数

頂点の数がｎのときの辺の数は

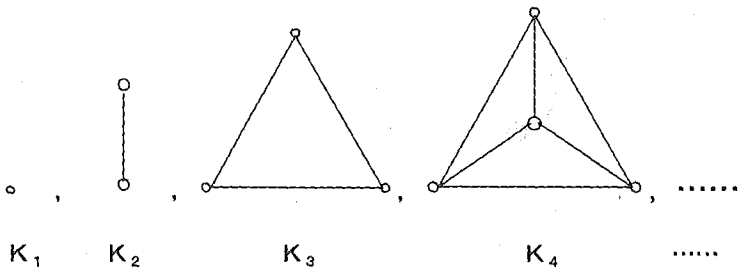
（辺の数）＝１＋２＋３＋…＋（ｎ－１）　（ｎ＝１，２，３，…）

練習１　頂点の数が次のような完全グラフの，それぞれの辺の数をいえ。

（１）　頂点の数が５　　（２）頂点の数が１２

グラフを利用する場合は，その関係がなるべく一目で分かるようなグラフに表現しておくと便利である。

離散グラフの中でも，すべての頂点 ○ が辺 —— によって，他のすべての頂点 ○ と連結しているグラフを、完全グラフといい，頂点の数ｎである完全グラフをK_nとよぶ.



頂点の数が５である完全グラフK_5を表してみよう。

練習１

完全グラフの頂点と辺の数の関係から辺の数を求める。

（１）頂点の数が５のときの辺の数は
（辺の数）＝１＋２＋３＋４＋５＝１５
（２）頂点の数が12のときの辺の数は
（辺の数）＝１＋２＋３＋…+10+11
＝12×11／２＝６６

頂点の数が５である完全グラフK_5は，問１ではグラフ表現をし，問２では完全グラフであることは判断した。

ここでは完全グラフのまとめとしてK_nの分類を示したが，深入りするものではない。

Ⅴ. 高等学校への離散数学の導入に関する数学教育関係者の意見

離散数学の高等学校への導入に関する数学教育関係者の意見

平成 18 年に高等学校の数学教育関係者 10 数名の方を研究会でリストアップし，「離散数学の高等学校への導入」に関してのご意見をお伺いした。

平成 17 年度に行った数学者の意見の調査では，離散数学の高等学校への導入に関しては，わが国の数学者の間では意見が分かれていた。そこで，本研究会としては，さらに高等学校の数学教育関係者の意見を集め考察の対象とした。その結果，下記の 12 名の数学教育関係者の方々から貴重なご意見をいただくことができた。ご関係の方々には心から感謝の意を表します。

ここでは，まず，12 名の数学教育関係者の方々のご意見を，氏名の五十音順に挙げてある。また，ご意見をいただく際に皆様にお送りした依頼状を最後に資料として掲載してある。

なお，本章に示されている考えは，個人の考えを述べたものであり，所属機関を代表して述べたものではありません。

「離散数学の高等学校への導入」にご意見をいただいた方々とその標題

「離散数学」を高等学校に導入する視点	大竹　宏二
離散数学における問題の教材化について	門脇　聖
離散数学の高等学校への導入について	川上　雅子
離散数学を高校数学に導入することに関する意見	岸谷　正彦
生きている数学，成長し続けている数学を生徒の手に	木下 俊行
離散数学を高等学校に導入することについて	篠原　宗弘
離散数学の導入について考えること	清水浩士
創造性の基礎の育成と離散数学	田中　勲
「異文化共生」「専門教育としての普通科目」の視点から	中澤　進
離散数学の高等学校への導入に関して	日野　朋之
離散数学の高校数学への導入について	前田　淳一
離散数学の高校数学への導入に対する期待と不安	田中　賢治

「離散数学」を高等学校に導入する視点

氏　名　　大竹　宏二
所　属　　埼玉県立大宮光陵高等学校

はじめに

これまで高校数学は「微分・積分」を中心とする教育課程であった。「離散数学」はコンピュータの発達にともない注目されている分野であるが，高校の教科書では本格的に取り扱われていない。この新しい教材「離散数学」を導入するにあたり，教育課程をふり返るとともに，現場教師の立場から考えを述べる。

1．前教育課程の「自然数の列」はなぜ教育現場に受け入れられなかったか

平成元年告示の教育課程では「数学 I」に「個数の処理」が取り入れられた。このなかで，ア　数えあげの原則　イ　自然数の列　ウ　場合の数（順列，組合せ）が「離散数学」に結びつく話題として注目された。解説につぎの記述がある。

> 〃　近年のコンピュータの発達に伴い，有限集合を対象とする離散数学が重要になってきた。「数学 I」における取扱いとしては，離散数学の最も基礎的なものとして，有限集合の要素の個数をある規則に従って数えあげることが中心となる。これらは，操作的，実験的な扱いをすることによって，問題解決能力を高め，数学の有用性を理解させる教材となる。〃（文部省『高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編』，ぎょうせい，平成元年．p.30）

しかしながら，高校教育現場で教材の主旨が受け入れられたとはいえない。実際の授業では，個数の数え方にはいろいろな方法があることを教師が教えるにとどまった。また，同じことを「数列」で学習することを理由に「自然数の列」を割愛した学校もある。こうした現状や学校週 5 日制に伴う学習内容削減を受けて，操作的，実験的な扱いをすることを意図した教材「個数の処理」は，つぎの教育課程改訂で削除された。

ふり返ってみると，教師と教材の両面に問題がある。多くの高校教師は講義型の授業をしているため，生徒の多様な考えを取り入れる授業はあまり実践されていない。オープンアプローチによる指導，Do Math の指導，問題解決型授業，子どもたちが作り上げる算数・数学の授業など，生徒がどのように考え，いかに活動したかという視点での授業研究が高校ではすすんでいないためである。高校進学率が 97%を超えた現状をふまえて，高校における授業法を改善するためにも授業研究を推進する必要がある。

一方，教材「自然数の列」は 2・3 年の学習内容への関連が希薄であり，問題の発展的な取り扱いが困難である。「自然数の列」は内容がやさしすぎることもある。新しい教材を導入するにあたっては，単元の関連，発展的な扱いなど教材の位置付けを吟味する必要がある。「離散数学」が重要であるというなら，その意図が反映される教材の配列，内容であるべきだ。また，大学で指導すべきか高校で指導すべきか内容を吟味する必要があるだろう。こうしたことを踏まえ，問題の発展的な扱いができる教材を選定すべきである。

これとは対照的に教育現場に定着した教材がある。昭和 45 年改訂の教育課程で新たに導入された「行列」は，現行教育課程でも取り扱われており，教育現場に受け入れられた。「行列」は式の計算だけでなく，図形の変換や移動など問題の発展的な扱いが可能である。さらに，連立方程式と図形の変換を対比することができ，知識を整理・統合することができる。代数的な見方と幾何的な見方の双方から問題を分析することができる教材であり，コンピュータを利用した指導ができる教材である。このように，新しい教材を導入するにあたっては，問題の発展的な扱いと，学習内容の対比，統合など

魅力ある内容であることが重要だ。

2．教科書における「離散数学」の扱いについて

現教育課程はコア・オプションの考えに基づき，「数学Ⅰ」「数学A」などの科目編成になっている。このため，「離散数学」のように 1 冊の教科書にまとめるのは困難である。また，新しい教材「離散数学」を取り入れるために，数学の単位数を大幅に増やすことは他教科との兼ね合いから難しい。単位数を増やさずに「離散数学」を導入するには，現行の学習内容を精選するだけでなく，一部を削除しなければならないことになる。こうした状況から，つぎの視点から教科書に取り入れることを筆者は提案する。

（1）教科書の発展的な扱い

「数学Ⅰ」で「順列・組合せ」を学習する。この発展的な話題として，「組合せ論」を取り上げることはできる。ここで，従来の教材のように知識を指導するのではなく，応用例を示すなど数学への興味・関心を高めることをねらいにする。また，教科書の内容で完結しているのではなく，現在も研究されているというようにオープンな記述はできないだろうか。さらに発展的な学習を助けるために，参考文献を紹介するなどしてほしい。

「数学Ⅱ」で取り上げる「不等式の表す領域」の発展的な話題として「線形計画法」がある。単なる紹介で終わりにせず，現代生活でどのように応用されているか具体例を示すことで発展的な扱いができる。この他にも，「離散数学」につながる話題は数多くある。このように，教科書の発展的な扱いとして「離散数学」を導入するのであれば，すみやかに実現できる。

（2）数学史の観点を取り入れる

新しい研究分野が開拓される背景には，従来の考えでは解決できない問題が発生したことが要因にあげられる。こうした数学史の観点を取り入れて「離散数学」を導入してはどうか。

「微分・積分」では無限と連続を扱う。これと対比して，連続でない離散的な対象を扱う「離散数学」を導入することで，連続の意味が鮮明になる。複眼的な見方ができるような教材の導入，配列はできないものだろうか。数学の本質を把握し，より深い理解を得るためにも，微分・積分を頂点とする高校数学からの脱却は意味がある。

オイラーの多面体公式は，正多面体における公式 $V-E+F=2$ で完結するのではなく，多面体の定義を見直すなどして改良され発展した。数学を完成したものとして捉えるのではなく，研究の対象として魅力あるものとして生徒に伝えたい。こうした意味からも数学史の観点を取り入れ，数学が発展し続けていることを「離散数学」導入で試みたい。

おわりに

新しい教材「離散数学」を導入するにあたっては，従来の教材では学習できない魅力ある内容であってほしい。このためには，これまでの教育課程をふり返って，失敗に学ぶ姿勢が大切である。意図した教育課程と現場教師の認識の違いによって，効果が得られないことがある。こうした視点から「離散数学」の教材をふり返る必要がある。

離散数学における問題の教材化について

氏名　門脇　聖
所属　島根県立吉賀高等学校

私が離散数学に出会ったのは，高校３年生の時です（実際の出会いは，「場合の数」等で，それより以前に出会っていましたが･･･）。その出会いはある１冊の本「数学おもしろ事典」との出会いであったのですが，その時の率直な感想は「これが数学なのか･･･」という非常に新鮮な印象だったように記憶しています。大学３年からゼミで離散数学の一つの分野である組合せ論を勉強するようになり，組合せ論における様々な問題に取り組む中で，その離散的構造に広がる世界の奥の深さを知ることができました。

組合せ論は，Gauss が数学の女王とみなした整数論と「姉妹科学」であると言われます。その理由のひとつは，ややこしい定義や基本的な知識をあまり必要とせず誰でもすぐに取り組める問題にもかかわらず，その解決には意外な努力を要することが数多くあるためであるのではないかと思います。言い方を変えれば，組合せ論を含めた離散数学の問題には，ある見方をすれば難しい問題でも，見方を変えることによって明快かつ簡単に解ける問題がいくつもあるということが言えると思います。そのような場面を生徒たちに提供することによって，彼らが数学の面白さや数学的なものの見方・考え方のよさを感じられる機会となると考えることができます。上述したように，これは実際に私自身がその経験をしたことであり，生徒たちにそのような問題に取り組む過程での感動や驚きを味わってほしいという思いの表れかもしれません。しかし，そのような問題が教育現場での数学教育のカンフル剤として活用できるのではないかと考え，学生時代から「ハノイの塔」，「パスカルの三角形」，「碁盤の目の数」等々･･･のいくつかの教材化を考えてきました。

幸いなことに，教員６年間で，前任校において「数学基礎」で「一筆書き」や「タイルの敷き詰め問題」等の授業をさせてもらったことと，昨年 12 月に「鳩の巣原理」についての研究授業実践の機会をいただきました。それらの授業を振り返ってみて，離散数学の教材を扱うことによって主に次のメリットがあると思っています。

- 生徒にとって身近な事象から題材が作りやすいこと。
- 多種多様な考え方ができること。
- 「わかった」という情意面での喜びを感じることのできる問題（場面）が作りやすいこと。
- 身の周りの様々な事象への関心が高まること。

これらのメリットによって，日頃，数学が苦手だと感じている生徒にも離散数学の問題に対しては，積極的に取り組むことが多いことも結果としてのメリットであると考えています。

生徒はそれぞれ個性をもち，その知識・技能や経験も多種多様です。なにかと数学は，「形式的に答を求めるので，嫌われることが多い」とよく耳にしてきましたが，そのような現状の一つの解決方法が離散数学における問題の教材化によってできるのではないかと思っています。そして，授業全体の流れの中で，興味ある展開，経験を重視した扱い，程よい挑戦をさせながらも難しすぎない題材，よさの感得といった諸点には十分配慮すべきであることも，実際に授業を行う上で大切なことであると考えています。その実現に向けて，私自身が数学に対して常に課題意識をもち取り組んでいきながら，離散数学における問題の教材化について，今後も取り組んでいきたいと思っています。

参考文献

[1]長尾　篤志・景山　三平・長崎　栄三(2006)：高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発．国立教育政策研究所

離散数学の高等学校への導入について

氏　名　川上　雅子
所　属　徳島県立徳島東工業高等学校

教師になって２０年が過ぎようとしています。昨年普通科高校から専門高校（工業高校）に転勤しました。この１年間，「生活に必要のない難しい数学内容まで，なぜ勉強する必要があるのか」，「生活するには足し算引き算ができれば十分でないか」などといった質問や疑問を生徒は投げかけてきます。実際，最近の生徒は，「生活に役立たないもの」，「役立ちそうにないもの」はあまり「学習する意味がない」と考えているように思います。進学する生徒は，すぐには数学が何の役に立つのかどうかわからなくても入試で必要だからという理由で，とりあえず勉強はしなければならないと考えます。しかし，進学しない生徒にとっては，数学は卒業するために必要な単位の一つとしか考えてないようです。つまり赤点を取らない程度にがんばればよいと考えています。現在は以前の高校生より，努力して上を目指してがんばろうとする生徒は少ないです。数学離れというより全般的に苦しい思いをして勉強をすることの意義が，現代の若者は見いだせないのかもしれません。努力しないと勉強はできなくて当たり前だと思うのですが，その努力もしたくない。このため，ある一定のわからない状態が続くと，もうどうでもよくなって無気力になってしまいます。これは工業高校の生徒だけに当てはまるものではありません。普通科においても同様です。

こういった現状の中，従来の数学に興味を持てない生徒が，ちょっとがんばってみようかなと思って勉強を始めてもこれまでの体系化された数学では，どうにもならないような状況にあります。しかし，このような生徒であっても離散数学の内容であれば，気持ちを新たに取り組めるのではないかと思います。そして何よりも生活と結びついており，その必要性を実感できるために，勉強することがとても意義深いものとなると思います。そしてさらには，それほど予備知識を必要としないでも取り組めるということから，数学嫌いを少なくさせることができるのではないかと思います。これまで数学は苦手だったけど，今までの数学と違うな，ちょっと勉強してみようかなと生徒に思わせられるということは非常に重要なことだと思います。

実際，前任校で数学が入試で必要のない生徒（数学があまり得意でない生徒）に卒業前の数時間，基礎数学の内容の勉強をしました。そのとき，生徒は授業に非常に意欲的でした。問題を解いているときの生徒はとても生き生きしていました。「これまでの数学と違って内容が楽しい」，「おもしろい」と言う生徒もいました。これまで数学嫌いであった生徒にも，十分数学好きになるチャンスが離散数学にはあると思います。

しかし，授業の進め方やその評価については十分検討すべきだと思います。なぜなら，離散数学の一つの分野である，数学Ⅰ：球の体積と表面積，数学Ａ：平面図形などは，前任校や現勤務校では深入りせずに簡単に扱っています。証明問題よりも求値問題だけ解ければよいというような傾向が強いです。したがって定期テストでも，証明問題は出題しませんでした。生徒はなんらかの評価が伴わないものについては，勉強しなくなる傾向が強いです。これではせっかくの離散数学のよさが生かされません。この点を十分考慮することができれば，新しい離散数学の内容を導入することによって生徒の数学離れをずいぶん食い止められるのではないかと考えます。

離散数学を高校数学に導入することに関する意見

氏名　岸谷　正彦
所属　東京学芸大学附属高等学校

「高校数学における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究」ありがとうございます。IT 時代へ突入し，高校の課程で取り上げるべき数学が，現在の微積分を到達点とする数学でよいのか，あるいは本来教えるべき数学は何なのかは，私も常々思っている事であり，数学の専門家のご意見を拝聴しつつ，諸外国の実例をうらやましく思いながら，読ませていただきました。基本的には，導入することに異論はないのですが，いくつか心配な事柄に対し，私なりの考察を入れて，回答にしたいと思います。

1．導入に対する事項

まず，「高校で扱える範囲，離散数学とは，何なのか」であるが，数え上げ組合せ論，論理分類活動（かつ，または，でない），数列，確率と統計，グラフ理論，アルゴリズム，行列，数列（反復，再帰）などではないかと考える。この中にはすでに扱われているものも多く，これらの内容を既存の数学内容に付加する形で行なうことがよいのではないかと考える。理由は，時間的な制約である。現在でも統計などは，扱いたい内容であるが，時間がとれないのが実情で，単位数が増えない限り，さらに多くの内容を取り入れることは，難しいと考える。また，より充実した授業の実現には，時間が必要である。ただし，一つのセクションは 10ー20 時間程度で完結するのが望ましいため，内容の限界はある。もちろんグラフ理論は，独立して一つのセクションとして扱いたいと個人的には考える。

その他，微積分を到達点としないコースなど，いくつかのコースを用意する案もあってもよいのではないかと考える。その方が充実した内容構成が期待される。ところで，「どのような数学的な視点が養われるのか」は，研究を待ちたいと思う。私は，離散数学を通して，数学を考える楽しさと，数学が持つ論理性を伝えたい。結局は，高校で身に付けさせる数学は何なのかの議論に尽きると思う。そのためにも学校ごとの柔軟な姿勢は必要であろう。

2．生徒の側と教える側の問題

学力の低下などと言われているが，２つの要因があると考える。一つは基礎学力が定着しないでどんどん新しい事が増える状態，それと共に学ぶ意欲の低下である。考える事がなおざりにされているため，どんなに興味のある問題を提示しても，なかなか興味を示さない。効率だけを求めて時間をかけた学習をしていないためである。また指示待ち，答え待ちの生徒も多いのではないか。そのような生徒に対し，新鮮で頭を動かす数学は必要である。ただし，クイズだけではだめで解決に至るアイディアを重要視したい。その他，離散数学の可能性の一つとして，先生主導の講義調から生徒独自の発想で進めていく授業が，期待できそうである。コミュニケーション能力等も今後鍛えていかなくてはならないが，離散数学は，１人で考えるより，さまざまな意見の中から推論していく方が，グループ学習など授業形態にあっていると思う。より懸念されるのは，教師自身の知識やモチベーションの低下であろう。結局，教師自身が興味を持って勉強していく必要があろう。盛んな研究や，研修の場を増やす事などが先決である。

3．大学入試との関連

先般の未履修問題が社会問題となったように，多くの高校生にとって，高校の学習内容は，大学入試の影響を受けざるを得ない。いくら将来に必要な素養と考えていても，大学入試に出題されなければ，学習の意欲も高まらず，場合によっては，教師自らが選別する事態が，昨今の好ましからざる現

状である。高校数学でも，統計，数値計算などが，その憂き目にあっている。即座に離散数学を高校で導入しても，大学入試の出題範囲に選択されなければ，離散数学を学習する生徒は多くないであろう。そういう意味で一つのセクションにするよりは，既存の内容に加える事を 1. で述べた。ただし，大学入試問題の中では，整数論などは，出題範囲外と言われる事はない。大学側が要求する数学の素養を持った生徒を入学させるというポリシーで試験をすればよい。微積分と離散数学が必要ならそれを出題すればよい。

あるいは，選択させてもよい。あるいは大学側で，特に出題範囲を示さないのも一つの解決策であろう。そうすれば高校側でも教師が責任を持って，本来の生徒にあった数学が展開でき，当然，離散数学を組み入れる高校も徐々に多くなるであろう。

生きている数学，成長し続けている数学を生徒の手に

氏　名　木下 俊行
所　属　東京都立青山高等学校

私が授業でフラクタル幾何学を扱うようになって，もう１５年経ちます。１年生には高校数学に慣れてきた頃合いを見計らって，２年生にはベクトルの次元の概念を通じて，３年生には微積に関連させて，土曜講習や夏期講習でも取り入れてきました。生徒の反応は概して好評で，総じて「数学に対するイメージが変わった」「世界そのものに対する見方が変わった」等の感想がありました。ときには授業が終わった後，「もっと話を聞かせて欲しい」と目を輝かせて来る生徒もいました。

フラクタル図形の自己相似性や自然の造形がもつフラクタル性はダイレクトに生徒の心に浸透していきます。頭で理解するのではなく，直感的体感的に伝わるのです。私にはDMに関する精密な知識はありませんが，DMも同じように生徒にダイレクトに伝わるのだと思います。

数学的体験は，極めて個人的な体験です。知によって，魂が直接揺さぶられるような体験をすることが，学習意欲を向上させることは論を待たないでしょう。この体験こそが，数学を極めたいという強い意欲を引き出し，問題解決に伴う困難を乗り越えていく意欲とエネルギーを生み出すのです。

知識を伝えるのは良い教師，本当の一流の教師は生徒にインスピレーションを与えるものです。例えば，オーケストラの指揮者は音を直接出すわけではありません。音を出すのは楽団員です。指揮者が良い説明をして的確な指示をしたときに，いい音が出るわけではありません。完全ないい音は，一人一人が自由で解放された状態のときに引き出されるのです。知識注入型の授業ではなく，報告書にあるような活動型のDMの授業から，数学的体験は生まれやすいと考えます。

世界学力調査の結果からも明白になったとおり，日本の高校生の学習意欲は低下しました。そのための具体的な対策として，カリキュラムの変更は時代の要請と考えられます。マンデルブロウ博士が，日本講演で語っていたように，「コンピュータ，携帯電話が普及し，視覚，色彩，映像を重視するような文化の時代に生まれ育っている若者たち，生徒たちが，何に反応するかということをもう一度考え直すべきです。彼らはフラクタルに反応するのですから，フラクタルを試したらよいのです。フラクタルを試させ，直感を大切にするように言えば，彼らは決して，数学は冷たくて乾燥したものだとは言いません。」

生きている数学，成長し続けている数学を手に取り，その感触を体験した生徒は，数学に対して深い興味を示し，現行の微分積分を頂点とした計算中心の数学に対しても，所謂受験数学に対しても強い意欲を持ち，大学への進学に取り組んで行きます。離散数学を高校に導入することによって，DMと微積は互いに補い合い，融合していくはずです。

DM導入に関して，現場教師の人材不足が懸念されているようでしたが，我々現場教師にはそれを取り入れる気概もありますし，意欲もあります。

15 年前，生徒達に「君たちが孫を持つ頃には，フラクタル幾何学は常識となっている。」と宣言しました。その生徒たちも，もう家庭を持ち，子供を持つ年齢になりました。我が国の数学教育が世界の潮流に後れをとらないように，この場をかりて，関係機関の英断を要請します。

生きている数学，成長し続けている数学を生徒の手に

生徒にとって数学のイメージは完成されたもの，冷たく論理的なもの，というのが圧倒的多数のイメージです。かなり意欲的に数学に取り組んでいる生徒でも，数学は完璧に作り上げられたもので，完

成されたものとしてうつるようです。極端な生徒は「もう新しく発見されるものなんてないんじゃないの？」「もう全て見つかっているから，新しく何かが発見されることはない。」「２１世紀に我々が高度に発達すればもうみつからないのでは」という生徒もいました。

そんな彼らにフラクタルの話をし，これも数学の分野なのだと伝えると，非常に驚き次に深く感心します。そのような反応をした生徒は，必ず意欲的に学習に取り組むようになります。

離散数学を高等学校に導入することについて

氏　名　篠原　宗弘
所　属　北海道倶知安高等学校

1．はじめに

高等学校学習指導要領の数学の目標には，「数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。」とあり，基礎的・基本的な知識や技能の習得を基に，様々な問題解決の方法を身に付けることが求められています。しかし現状では，中学までの内容を十分に身に付けていない生徒や，学習したことを細切れで暗記しその後忘れてしまう生徒，自ら課題に取り組むことなく正解の説明を待っている生徒が少なくありません。

ここでは，現状を踏まえた上で，系統性のある学習とは別に，計算などの習熟を必要としなくても問題解決の方法を身に付けさせる教材の一つとして，離散数学を高等学校に導入する必要性について考えてみたいと思います。

2．高等学校数学で身に付けさせたい能力

変化の激しい現代の社会では様々な問題が容赦なく生徒に降りかかり，単独の教科の知識だけでは判断や対応ができにくくなりました。単に知識や技能として知っているだけではなく，数式・図表・言語を積極的に関連させながら活用して，様々な課題を解決していかなくてはなりません。今日求められている学力は，知識や技能はもとより，発想力・論理力・表現力・思考力・コミュニケーション力（以下「問題解決能力」とする）など，実生活の様々な場面で活用できる，生きる力の基礎として欠かせない能力です。特に数学では，生徒の能力に応じて問題を調整できる利点があり，整理や比較をして問題をしっかり把握する力や，自分の考えを他者へ分かりやすく説明する表現力を，段階を踏んで育成することができます。

しかし現実には，計算だけに意識が集中してしまい，大切な思考の部分がおろそかになることが多々あります。例えば，解き方のパターンだけを覚えている生徒は，計算方法に集中しすぎて思考が鍛えられていないため，新しい概念が比較的多く出てくる数学Ⅱや数学Ｂでつまずきやすい傾向にあります。このため，各種調査報告にあるように，授業で自分の考えを表現し，他者の考えと比較・検討できるよう，教材や指導の工夫に取り組む必要があります。

3．離散数学を高等学校に導入することの意義

離散数学は，様々な例でも分かりますが，計算などの習熟を必要としないで，豊かな発想力や論理力，思考力を育成できる分野です。そこで，微分法・積分法を頂点とした系統性のある内容を学習する一方で，離散数学の学習を通して，数学的に考える力や他者と交流する力，メタ認知能力などの自己評価をする力などの「問題解決能力」を，高等学校の早い段階において育成することが望ましいと考えます。例えば，自分の考えを理路整然と説明し他者を納得させるコミュニケーション能力は，正解よりも解決のプロセスを重視する離散数学で，より集中的に育成することが可能です。また，実験などで様子を探り，グラフなどを使って視覚的に考える離散数学の手法は，数学に限らず様々な問題解決に役立てることができます。このように，離散数学を学習して得た方法を他の学習で積極的に活用することで，「問題解決能力」の一層の定着を図ることができると考えます。

4．離散数学を高等学校に導入する具体的方策

実際に離散数学の授業で「問題解決能力」を育成するためには，つまずくことや間違うことを当然のこととして受容するなど，活発な議論のできる教室にすることが大切です。そのためには，最初の授業でエンカウンターなどを行い，教室が「間違っても許される」空間であることを確認させた上で，

その授業の中でおぼつかない発言や説明に対して正の評価を与えるなど，思考したり表現したりすることを促す必要があります。また，様々な考えの練り合いを通して見方や考え方の発見や発展につながるため，多人数での授業がより効果的であると考えます。

さらに，内容の知識が不十分なのか，適用する方法が不十分なのかの評価や，「問題解決能力」が変容したことに対する評価を生徒に還元し，今後の活動に生かすよう工夫することが大切です。例えばポートフォリオ評価の活用が考えられますが，これは生徒がそれまでの取組を振り返りながら解決の方向性を判断させる評価法です。たとえ目標に到達しなくても，今後の課題にどのように生かしていくかを考えさせることができます。私の経験上，ポートフォリオが厚くなるにしたがって，生徒は自信を持って自分の意見を発表するに至っています。このように，考え方や行動の成長を生徒自らが評価・分析できるよう支援することで，「問題解決能力」を身に付けさせることができます。

5．おわりに

「数学は間違ってもいい。自分の言葉で書いてごらん。」と生徒に話すと，本来学校の中で許されているべき「トライ＆エラー」を見失っているため，非常に驚いた顔をします。そして授業が進むにつれ，「間違ってもいい」ことを許された生徒は，どんどん発言し（発想力・表現力），ほかの生徒の考えに意見をいい（コミュニケーション力），自ら深く考える（論理力・思考力）ことが多くなり，しかもそれは今まで数学に対して拒否反応を持っていた生徒や成績が下位の生徒ほど顕著に現れる傾向にあります。

また最近の大学入試問題は，受験テクニックだけで解ける問題が以前と比べて少なくなり，実験して問題を調べた上で，関連する知識を総動員して解く問題が多くなっています。これは数学で育成された「問題解決能力」を，現実の問題解決に活用させたいという，数学教育に対する社会の要望を考慮した結果であると考えています。「教科書ばかりだと受験に対応できない」のではなく，授業ごとの課題を明確にした上で，教科書などを使って適切な情報を提供し，数式・図表・言語の関連を重視させながら，主体的にトライ＆エラーができる機会を与えることで，受験にも社会生活にも対応できる「問題解決能力」が身に付くと考えます。

生徒の学びの方法は様々です。生徒の実態や社会の動向に正対した上で，系統的に教える，方法を育むなど，求める能力に応じて教材や授業方法を工夫し，バランスを考えながら「問題解決能力」を「教え育む」必要があると考えます。

離散数学の導入について考えること

氏　名　清水　浩士
所　属　広島大学附属福山中・高等学校

現教育課程において，離散数学に特に関連があると思われるのは「組合せ」である。その分析のみで離散数学が語れるとは思っていないが，教育課程として実施されてきた題材であり，離散数学の導入を考える足場としてその意義と課題については普遍化できるものもあろうかと考えるのでそこから始めたい。

この分野で発揮される生徒の力が，他の分野で発揮されるものと必ずしも一致しないことがよく生じる。つまり，特別に得意とする生徒や苦手とする生徒が数多くいるというのがこの分野に特徴的なことである。また，教員が思いもしなかったような考え方が発せられることも多い。数学学習において他の分野と異なる思考を要求するのではないかと思う。組合せにおいては，数えあげるにあたり，対象がどのような事象であるのかを分析することが大切であり，状況の想定ができなければならない。生徒の得手不得手の背景には，生徒個々が直接間接にもつ生活体験からくるものもあるが，そのような状況の想定やその分析ができることは大事な能力であると考える。スポーツの選手である生徒が試合におけるトーナメントの組合せの問題が得意であったという例もある。それだけこの分野が実社会を間近に見ることのできる分野であると言えよう。それゆえに生徒が数学の有用性を感じ取りやすい。私自身，全く抽象的な束論がブール代数を経て著しく現実的なエレベータシステムの回路の簡略化につながることを知ったときは驚きであった。実生活のとなりに数学があることを意識することができることは情意面においても有効であると同時に，状況の分析に数学的な思考を接続しやすくなり，数学的な思考がその状況の中で有効にはたらくという効果が期待できる。

高等学校数学へどのような内容を導入するかを指摘できるほど，私自身離散数学を熟知してはいないが，いくつかの文献を調べる中で，次のことを感じる。

第１に，前述したように社会との関連づけが生徒にとって見えやすい内容が望ましい。

第２に，個々の固有の領域の学習で完結するのではなく，その領域を学習することを通して，高校生にとって離散数学的な考え方や方法が他の分野に対してもはば広く適用できるような内容を導入することはよいと思う。例えば現教育課程においては数学的帰納法があてはまる。実践例にあるように「鳩ノ巣原理」もそうであろうと考える。

第３に，内容の扱いの方法として，発想に到る過程を大切にすることと，その発想がどのような拡がりをみせていくのかという系統性を大切にすることが他の分野にもまして大切ではないかと考える。離散数学の考え方を用いてあらたな発想をすることができるということが重要であるが，対象とする領域は広いので，その発想も多い。生徒にとって単に個々に覚えなければならないパターン化された方法とならないよう指導上留意する必要があろう。離散数学に限らず，教えるのは各学校の教員であり，どのような優れた内容であっても，指導者が内容を熟知していなかったり，指導法を誤ると，かつての数学教育現代化運動においてあったように，現場においてとまどいや混乱が生じることも起こりうる。離散数学が高等学校にとっては新しい題材であり，指導の蓄積が少ないだけに，さらなる教材研究が内容的にも教育方法的にも必要であると感じると同時に，学校教員にその主旨と方法の定着をいかに図るかということが重要になるのではないかと思う。

創造性の基礎の育成と離散数学

氏　名　田中　勲
所　属　広島県立教育センター

高等学校の数学科の先生方と接するとき，生徒に高等学校で数学を学ぶ意義をどう感得させるかが話題になる。高等学校の現状を伺うと，数学を選択する生徒の数は減少の傾向にあるとのことである。教育課程実施状況調査によれば，高校数学の内容は社会的有用性の価値が低いと生徒に認識されている。生徒の多くは，日々暮らしていく上で数学は全く必要ないと思っているのだろう。確かに学習する中身が高等な数学になるにつれ，学んだ内容が日常生活で“そのまま”活用できることは少なくなる。指導者は，身近な事象と関連付けた，直接的な有用性につながる教材を開発することも大切だが，それには限界があることを認め，生徒にも納得させなければならない。高等学校では，数学的活動が純粋に数学的な問題から始まることは往々にしてあるのである。では，高等学校で数学を学ぶ意義を生徒にどう感じさせればよいのか。私は，“思考を楽しむ場”としての数学の授業づくりを提案したい。すなわち，高等学校数学科の目標にある「創造性の基礎の育成」を数学科の意義として強調すべきだと考える。現在，高等学校で行われている数学科授業の多くは，最も合理的な解決方法を最も合理的な手順で“伝えている”に過ぎない。この場合，生徒は伝えられたことを訓練によって“見かけ上”身に付け，そのことで対処できる問題に対してのみ反応しているのである。そこでは試行錯誤や思考上の苦悶が極めて少ない。これでは，創造性の基礎を育てることは難しい。

数学科教育における「創造性」について考えるとき，それは文化的価値の創造（学問上の新発見）というよりも，もっと個に起因した，数学を学ぶその個人にとっての創造・発見ととらえるべきであろう。つまり，数学という学問の上では既に明らかなことであったり，生徒にとって先の学習で知ることであったりしても，その時点で生徒にとって新たな発見をしたのであればそれは創造的活動であり，そうした活動を引き起こす力が創造性の基礎であると考える。

穴田恭輔(2004)※は，数学教育における創造性を構成する態度・能力として，積極性，独創性，柔軟性，緻密性，流暢性の五つを挙げ，それらを創造性因子と名付けている。先行研究によれば，これら創造性因子の形成には，学習活動での発散的思考が重要な役割を果たすとの主張がみられる。また，これら五つの因子と，高等学校学習指導要領解説数学編に「創造性の基礎」として例示された態度・能力を対比させたところ，積極性＝数学の学習への興味・関心，独創性＝数学的な見方や考え方のよさを認識する豊かな感性，柔軟性＝多面的にものを見る力，緻密性＝論理的に考える力，流暢性＝数学的に考察し処理する力といった対応が見え，創造性因子の形成を図ることは，数学科の目標に合致している。

今回まとめられた報告書によれば，離散数学を学ばせることは，生徒の発散的思考を促し，創造性因子の形成に有効であると判断できる。よって，私は高等学校への離散数学の導入に賛成である。

実際の導入に当たって問題点を挙げれば，報告書でも指摘されているように，学校現場に対し，離散数学を学校教育で取り上げることへの理解をどう図るかという点であろう。これは一定の指導力を期待する上で最も重要な課題であると考える。離散数学という半ば未知の内容を指導する不安からくる抵抗は容易に想像できる。実際に指導に当たる教員へのフォローは当然必要であろう。私自身，導入には賛成だが，その際，指導内容に関して教員研修を実施するなど，現場の混乱を避ける配慮を強く求めたい。

※穴田恭輔(2004)：「数学教育における創造性についての一考察―創造性の一つの測定方法と数学の授業評価―」，『神戸大学人間科学研究』11巻2号 pp.117-128

「異文化共生」「専門教育としての普通科目」の視点から

氏　名　　中澤　進
所　属　　静岡県立富士宮東高等学校

高校数学に離散数学的な内容を導入する件に関し，２つの視点から意見を述べたい。

ひとつは，異文化共生の視点からの数学教育についてである。

近年，ひとりひとりの異なった考えがあってよいとされ，またグローバル化の流れの中で外国籍の人間との接触がますます日常化している。「ひとりひとりが異文化」と言われる時代に，異なった考えや感覚，文化を持った人間どおしが社会生活を営むには異文化共生の視点と能力が必要である。均質な文化の中で長い歴史を歩んできた日本人はこうした異文化との共生が苦手である。

異文化理解に不可欠なのが他者理解であり，それにはコミュニケーションが欠かせない。同じ文化を共有する人間とだけでなく，異なる文化圏の人間とも考えや感覚を共有できるコミュニケーション能力が求められる。

数学，特に数式を変形して機械的に解答を導く内容ではなく，解答への道のりを言葉で説明できる分野を多く含む離散数学の学習は，自分の考えを順序立て，論理を通して相手に伝える能力を養うのにふさわしい単元である。報告書の中でも離散数学の学習にはグループワークが適しているとされており，共同作業を通じて異なる意見を理解し受容できる力を育てられると考える。

数学は人工的に組み上げられた学問であり，その体系内において論理の流れは完全に保証される。高校数学は，解法は複数あっても答は確定しており，答がちがう場合は論理の展開のどこかに間違いがある。この，論理の積み上げと明確な解説はコミュニケーションスキルとして重要である。

二つ目は，専門教育としての普通科目という視点である。

いわゆる「先進国」では申し合わせたように，義務教育は 15 歳前後で終了する。そのころには人は自立的に自分の将来を考えることができるからだとされる。複線型の学校体系を持つヨーロッパでは，この時点で専門性を明らかにして後期中等教育に進学する。単線型のアメリカではハイスクールの中で，科目の選択や単位制などによって自分の学ぶ内容を自分で決定するシステムになっている。

戦後，アメリカの体系を取り入れた日本は，単線型であるにも関わらず事実上の学年制であり，選択科目も多くない。何より，生徒自身が将来像を描いておらず，多くの生徒にとってモラトリアムとしての高校時代である。そのため高校での学習が自分の将来と結びつかない実態がある。結果，高校の大半が普通科になりいっそう「大学進学のための」「何に役立つかわからない」勉強を強いられることになる。

したがって，高校はより専門に役立つ教育を展開する必要があると考える。それが専門教育としての普通科目である。もちろんそれは報告書にもあるように「親学問の縮小版」を「教える」ものではない。数学的な発想や解法を通して，それぞれの未来への具体的な力を育もうとするものである。

現在，高校数学の最終的な目的地は微積であるが，それは主に理工系向けの数学といえよう。現代は文系も含め多くの分野で数学が利用される。離散数学も含め，それぞれの目的に向けた専門性を持った数学の学習が必要ではないだろうか。

筆者は，まだ離散数学という言葉も知らなかった 10 年ほど前から，上述のような観点で授業

を考案してきた。グループワークで生徒が最も楽しんだ単元は場合の数であった。また，電卓を使用し，代入による試行錯誤で方程式を解いたり，三角比で$\sqrt{2}$や$\sqrt{3}$を特別扱いせず任意の角度で計算した。あるいはバーコードを読んだり，n進法の計算をn進法のまま行なう手順を扱った。

また，芸術コースのある高校では，エッシャーのような図形の埋め尽くしやフラクタル図形，フーリエ展開や平均率と純正律など，専門を意識した内容の教材を作成してきた。

これらの内容は今になってみれば，多くが離散数学的な発想であった。

既存の単元あるいは離散数学に限らず，生徒の将来の専門に役立つ様々な教材を考案することが重要であろう。またその点から見ても，離散数学はおおいに「使える」分野であると思われる。

以上，今後の高校教育に重要になると思われる2つの視点から離散数学の有用性を述べた。

離散数学の高等学校への導入に関して

氏　名　日野　朋之
所　属　新潟県立西川竹園高等学校

結論から申し上げますと，私は離散数学の高等学校への導入に賛成です。

昨年の日数教の全国大会で本研究の代表者でいらっしゃいます長崎先生のご講演を聞かせていただきました。その際，高等学校へ離散数学を導入する動きがあることを初めて知りました。大会後，長崎先生から報告書『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』を送付していただき，大変興味深く読ませていただきました。特に，様々な指導の実践例を眺めると，活気のある授業の様子が目に浮かび，「是非自分もやってみたい」と思われる教材が多数ありました。どの教材も数学的活動を効果的に取り入れてあり，生徒が生き生きと授業に参加する姿を思い浮かべることができました。

さて，本校はあまり学力の高い学校とは言えず，生徒の数学の授業に対する意欲・関心も低いのですが，そのような生徒でも興味を抱き，自分の頭で考え始めるようになり・・・，と充実した授業の様子を（願望も込めて）想像してしまいます。

また，学力の高いと思われている生徒の中には，本当は自分の頭で納得のいくまで考えて結論を出す，といった経験がほとんどなく，考えることの本当の喜びを知らない生徒もいることでしょう。こうした生徒にとっても離散数学で取り上げられている教材は大変良い刺激となると思われます。

我々現場で実際に生徒の指導に当たる教員は大変責任が重いと思います。実際に離散数学導入の運びとなった折には，１人１人の数学教員がしっかりと勉強をして，正しい内容理解はもちろんのこと，離散数学導入の理念を正しく把握した上で指導に当たることがとても重要であると考えます。この点に関しましては，報告書の根上生也先生の講演記録『離散数学カリキュラム化のポイント』が大変参考になりました。

最後に，繰り返しになりますが，私は高等学校の数学のカリキュラムに離散数学を導入することに賛成です。個人的には，今から離散数学の教材を研究し始め，来たる離散数学の導入に備えたいと考えています。

離散数学の高校数学への導入について

氏　名　前田　淳一
所　属　広島県立広島皆実高等学校

今回，離散数学を高校数学へ導入することについて，現場で指導している立場からの意見を求められた。しかし，私自身は，腰を据えて離散数学の勉強をした経験がないので，その内容や有用性について論じることはできない。離散数学の研究対象やその応用分野等については，聞きかじり程度には知っている。その程度の理解では自分自身の中に確たる像を描ききれないので，報告書を読んでも正直よくわからなかった。離散数学を導入するねらいは何か，それによって高校数学がどのように変わるのか。確かに現代社会では，離散数学は広く応用されていて，是非高校生に教えておきたい内容である。そうではあるが，大学からはじめて何故いけないのか。また，今の高校数学教育は多くの問題点を抱えていることは事実であるが，離散数学の導入がそれらを解決する糸口になりうるのか。このような疑問は解消せず，頭の中は霞がかかっているようであった。

そこで，離散数学に関する本を何冊か読んでみた。そのうち，特に根上(2003)を読むことで，大分スッキリとしてきたので，これをベースにして意見を述べることにする。

根上(2003)では，「基礎数学力」という語がキーワードとなっている。「基礎数学力」とは何か。根上(2003)では，「見てそれとわかる能力」と述べているが，明確には定義せず，具体的な問題を考察しながらその意味と重要性について述べている。そして，対極的な２つのタイプ「正しく計算ができるが，その意味までは理解していない，もしくは，興味がない」と「厳密なことまではわからないが，要するにこういうことだという理解を志向する」をあげ，現在の学校数学は前者であるが，社会生活を営む上では後者で十分である，むしろその方が大切であるという論調で貫かれている。そして，「基礎数学力」を育成するのに，離散数学にはそれにふさわしい題材が沢山あることが述べられている。

これを読んで，確かに「基礎数学力」は重要であると感じた。普段指導していて感じるのは，「生徒が考えなくなった」ということである。「答えを待っている」状態の生徒が多い。「わからない」という生徒には，「もう少し自分で考えてみなさい」ということにしているが，そうすると「先生は教えてくれない」という不満をぶつけてくる。わからないと言えばすぐに答えややり方を教えてくれる，まるでテレビのクイズ番組か何かと勘違いしているようである。しかし考えてみれば当然のことである。生徒は考えるための土台となるもの（これが「基礎数学力」であろうと私は捉えている）を持っていないのである。意味はわからないが計算して正解であればそれでよいという教育を受けていたのでは，そのような土台を培うことはできない。このような現場実態を考慮したとき，「基礎数学力」を重視する考えに賛同するものである。

離散数学の導入について，私は当初消極的な考えであった。その理由は，新しい内容を学習する生徒にとっては，それが連続数学であろうと離散数学であろうと，未知のものであることに変わりはない。違いは，離散数学の問題のほうが身近そうに見えることで，考えてみようというきっかけ作りになることぐらいであろう。その意味では，離散数学の導入は意味がある。しかし，取り組みやすそうに見えても，そう簡単に解に至ることはなく，あるタイミングで教師が考え方や答えを言ってしまうことになる。生徒が知らないことを教師は知っている。「知っているのなら早く教えてくれればいいのに」または「ちょっと待っていればすぐに教えてくれるのだから考えなくてもいいや」というように考えるようにならないかという心配。また，ある問題を解いて得られた結果を公式化し，公式運用だけの問題演習の繰り返しになるならば，それがどんな内容であれ，従来と変わらないという危惧。問題毎に考え方をマニュアル化し，「この問題はこのように考えるといいよ」という指導がなされたのでは，生徒に考えようとする態度をつけることにはつながらない。結局，今日の高校数学が抱える問題を解決することにはつながらないのではないか。このように考えたのが，離散数学の導入に消極的で

あった理由である。

しかし，「基礎数学力」の育成を目的として，そのための題材を離散数学から提供してもらう目的で導入されるのであれば，それは積極的に進めていくべきであると考えている。

大学入試センター試験をはじめ，大学入試が高校数学をゆがめたものにしているという批判がよくなされる。確かにそのような面はある。1 点でも高い得点をとらせるために，より多くのことを教えればそれだけ多くの結果が得られるだろうという工場生産的学習指導観（私の造語）にたてば，結果のみの教え込み（知識注入型とか，詰め込み教育と同義）と問題演習（問題解決学習ではなく教師による問題の解き方解説）中心の授業になってしまい，結果的に高校数学をゆがめているという批判である。しかし，最近の入試問題の傾向を見ると，必ずしもそれだけでは対応できなくなってきているように感じる。解法のパターンを覚え，計算していけば正解にたどり着くというものも多くあり，それはそれで大切なことではあるが，それだけでは対応できないものが増えてきたという印象である。それでは何が必要なのか。それが「基礎数学力」であろうと考える。例えば，「２次関数のグラフを書け」といえば，生徒は放物線を書く，しかも軸に関して対称な放物線を書く。しかしその対称性を利用して何かを考察するということがどれだけあるであろうか。対称性を利用すれば容易に解ける問題でも，計算で答えを出そうとする。それは生徒も教師も同じである。図を書いて特徴を捉え，それを言葉で言い表してから数式に表現し，それを論拠に考察を進めることのほうが，計算よりも重要なことがある。そして，このような思考経験はいつまでも記憶に残るであろう。一方，教えられた知識はすぐに剥落する。

このように考えると，離散数学の導入は，離散数学そのものだけでなく，連続数学の指導にも大きな変革をもたらすものであると期待できる。計算をはじめる前に，図を書くなどして問題の全体像を掴み，その上で必要なら計算をしていくという習慣を生徒も教師もつけることができれば，連続数学という体系化された現在の指導内容に対しても，教材の捉え直しや指導方法の見直しをする契機となる可能性が大いにある。そしてそのことが今日の高校数学教育が抱える諸問題を解決する突破口になると期待する。

（参考文献）

秋山仁，R. L. Graham(1993)，「離散数学入門」，朝倉書店

秋山仁(2005)，「離散数学―デジタル化社会が求める新しい数学」，イリューム，第 34 号，pp. 4-23

根上生也，中本敦浩(2003)，「基礎数学力トレーニングーNの数学プロジェクト」，日本評論社

離散数学の高校数学への導入に対する期待と不安

氏　名　田中　賢治
所　属　東京学芸大学附属高等学校大泉校舎

数学Ⅰの内容に対する社会的有用性に関する意識調査で，挙げられている 10 項目のうち４項目で「ふだんの生活や社会生活で役立つ」と思うという回答が 10%を超えていず，最も多いものでも 40%台ということであった。実際に授業を行っていても，毎年何人かの生徒から「どうして数学を勉強するのですか。」とか「将来役立つのですか。」という質問が発せられる。質問をしなくとも，数学の授業を受けている生徒の多くが，授業だからしょうがない，大学の入試科目だからしょうがなく勉強しているというのが現状であろう。

しかし，生徒は試行錯誤を繰り返し，あぁでもないこうでもないと考えて解くことが嫌いなわけではない。本校では２学年で学校設定科目「総合数学」を開設している。単位数は２である。選択科目なので，履修をしている生徒数はそれ程多くはなく，例年学年の１割程度である。この科目で扱う内容は，トランプで行うゲームの数理的なトリックを調べたり，動きのある立体模型を作ってその形と展開図の関係を調べ，更に複雑な形にするためにはどのような展開図にすればよいか考えたり，いくつかのテーマを１年間の中で勉強するというより探究していく授業である。受講する生徒は必ずしも数学の成績が優秀な生徒ばかりではなく，数学的には中位よりやや下のレベルの生徒も選択してくる。ふだんの数学の授業では，積極的に発言したり進んで問題を解くことのない生徒が，トランプを手にゲームを繰返しその仕組みの解明に夢中になったり，一生懸命立体模型を作り観察していたりする様子が見られる。その表情には真剣さと充実感が溢れている。ときには教師が思いつかない方法で解明を試みる生徒がいる。彼らにとって，何が問題になっているかが理解でき，その構造を知りたいという欲求を起こさせる課題になっているかどうかが重要な様に感じられる。

現在の高校数学のカリキュラムは微積分を頂上として，その内容の習得に必要な数学的な内容や計算方法を学ぶよう組み立てられている。登山をするように地道な努力を一歩一歩積み重ねて頂上を目指し，最後には頂上に立ち素晴らしい景色が見られただろうという構造になっている。多くの生徒にとって地道な努力や我慢を強いられることになり，苦痛となっている。「どうして数学を勉強するのですか。」とか「将来役立つのですか。」という質問は，その苦痛から発せられるのであろう。

離散数学には生徒にとって何が課題で何を求めればよいか見極められ探究してみたいと思わせる問題や，生徒の身近に感じられる状況を課題にした問題が多くあり，数学がふだんの生活や社会生活で役立つと思わせる効果も大きいように思われる。また，課題の探究には論理力や推論する力・洞察力は求められるが，数学的知識や技能が少なくて済むことも大きな魅力である。社会の変化に対応するばかりでなく，数学に生徒の興味関心を呼び起こし，授業を活性化する上でも離散数学の問題を採り入れることは意義あると思う。

しかし，一方で教師の意識を変える必要もあるように思う。離散数学の課題を扱うときは特に，生徒の探究活動を主にした授業が求められるであろう。教師側からの一方的な知識伝達型の授業では今までの授業と変わりのないものになってしまう。また，生徒に体系的な知識体系を習得させることが主たる目的でなく，生徒が個人やグループで探究活動に取り組む姿勢そのものを評価するものでなければならないように思う。

授業時間数が足りない，教師が離散数学の指導をした経験が少ない，大学受験でどのように扱われるか未知数である状況の中，かつての「自然数の列」が辿ったようにならぬことを期待する。

離散数学の高等学校への導入に関する高等学校教師用調査へのご協力の依頼

関係各位殿

前略

私ども国立教育政策研究所の研究員を中心とする研究グループでは，現在，日本学術振興会の科学研究費補助金を得て，「高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究」に取り組んでおります。現在の我が国の高等学校の数学教育においては，離散数学やフラクタルやカオスなどの新しい数学についての教育価値は認められつつも，学習指導要領の高等学校数学の内容としての位置づけが十分でなく，その教材開発は個々の教員の興味等に基づいて小規模に行われてきているだけです。一方，欧米諸外国においては，これらの内容は，高等学校の数学で，国家段階の教育課程だけではなく教科書や教室段階までも積極的に取り入れられていることが明らかになっております。

そこで，所内外の数学教育研究者，数学者，高等学校教員，教育行政関係者等約20名の研究メンバーによる研究組織（報告書参照）によって，我が国の高等学校の数学教育において離散数学を中心とした内容の導入に関する研究を進めているところです。

本年2月には、2年間の成果をまとめた報告書『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』を公刊しました。

そこで，この研究に一層の広がりと深さをもたせるために，高等学校において，現在、実際に数学を指導していらっしゃる方々に，本年2月に発行しました報告書**『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』**をご参照の上、自由で率直なご意見を承ることを計画致しました。

研究メンバーの方々のご推薦に基づいて，皆様方にご意見を伺いたく，お手紙を差し上げた次第です。

つきましては，先生の，離散数学を高等学校に導入することに関する積極的なご意見等を頂ければ幸いです。

お寄せいただきましたご意見等は，私どもの研究資料としてそのまま収録し，活用させていただくとともに，関係機関に配付したいと考えております。

お忙しい中，勝手なお願いをして誠に恐縮に存じますが，高等学校の数学教育のよりよき発展のために，特別の協力を賜りますように重ねてお願い申し上げます。

なお，ご執筆に際しては，誠に恐縮に存じますが，次の諸点についてご留意くださいますようお願い申し上げます。

ご意見等は，同封の原稿用紙を使うか，又は，ワープロ，テキストエディッターで，お願いいたします。本文をおおむね40字40行をめどとし，1頁目には，「表題」，「お名前」，「所属」を付けていただければ幸いです。

なお、ワープロを使われる場合には，横書きにて，おおむね40字40行をめどとし，1頁目には，「表題」，「お名前」，「所属」を付けていただければ幸いです。テキストエディッターでは，1行を40文字程度で書かれ，最初に，「表題」，「お名前」，「所属」を付けていただければ幸いです。

なお，甚だ失礼ではございますが，書式や送り仮名など些細な訂正を要する個所がある場合には，皆様方にお断りすることなく，私どもで訂正し，収録させていただきますので，あらかじめご了承くださいますようお願いいたします。

ご意見等は，誠に勝手ではございますが，

来年，平成19年1月末までに，

同封の返信用封筒をご利用の上，お送りくださるようお願い申し上げます。

なお，ワープロまたはテキストエディッターで作成される場合は，メールで，下記のアドレスにお送りいただけると幸いです。

nagasaki@nier.go.jp

なにとぞ，よろしくお願いいたします。

平成18年12月28日

研究代表者
国立教育政策研究所　長崎栄三

この件につきまして，ご質問等がありましたら，下記宛にお問い合わせくださいますようお願い申し上げます。

〒153－8681　東京都目黒区下目黒6－5－22
国立教育政策研究所教育課程研究センター　長崎栄三
メール　nagasaki@nier.go.jp

Ⅵ. 高等学校における数学の授業と評価のあり方

高等学校における数学的活動と授業改善

熊倉　啓之
静岡大学教育学部

【要約】本稿の目的は「数学的活動」に焦点をあて，高等学校数学の授業改善のための方策を探ることである。まず，数学的活動の意義や具体的な内容について文献を通して明らかにする。次に，現行の高等学校数学の授業の中で数学的活動がどの程度行われているかを，教育課程実施状況調査結果や教科書記述等から考察する。その上で，数学的活動を促す１つの方法として，離散数学の導入を挙げ，その教材の有効性を検討して，教材例を提示する。

１．はじめに

中学校と高等学校の数学の教科書を比べると，そこには大きな相違が見られる（熊倉，2005）。たとえば，図１，図２は，同じ教科書会社の中学校の三平方の定理の導入ページと，その拡張である高等学校の余弦定理の導入ページを示したものである。

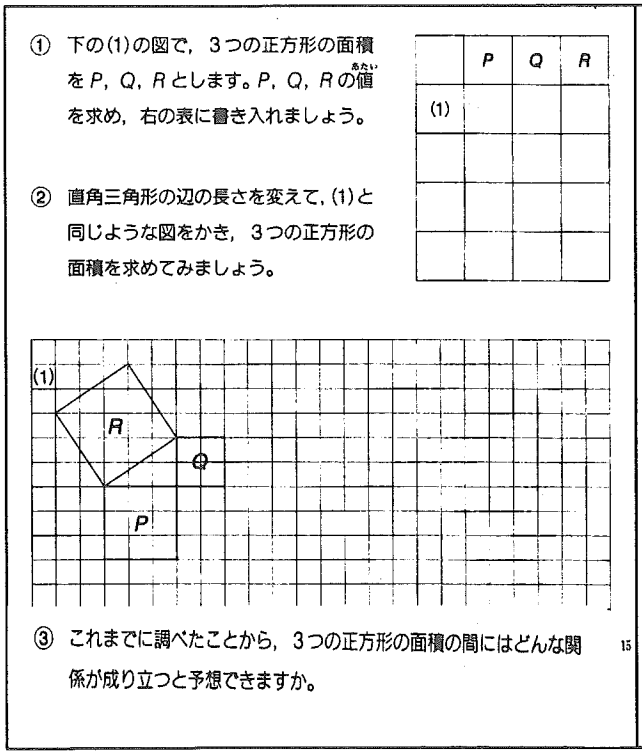


図１　中学校・三平方の定理の導入（東京書籍）

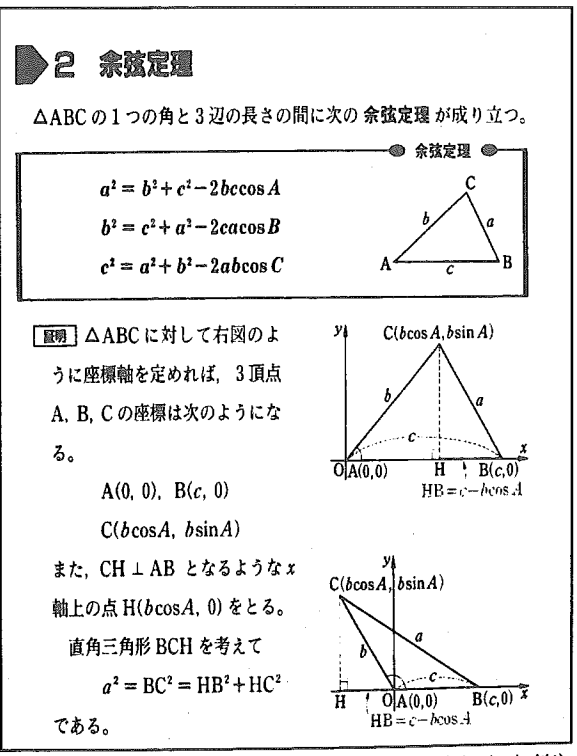


図２　高等学校・余弦定理の導入（東京書籍）

中学校の教科書の場合は，まず定理を発見させるための活動場面がある。その後，定理を提示し，証明→適用問題例→練習問題という流れになっている。また，問の中で別の照明方法も扱っている。一方，高等学校の場合は，定理をいきなり提示し，その後，証明→適用問題例→練習問題という流れになっている。中学校の場合も高等学校の場合も，他の出版社の教科書で概ね同じような形態である。

教師が授業を行うとき，必ずしも教科書の記述に沿って実施するとは限らないが，教科書記述に見る中学校と高等学校の違いは，授業の違いとしても現れていると推測することができる。

第3回TIMSSの一貫として実施された授業ビデオ分析による国際比較研究結果から，日本の授業や授業研究が一層高く評価されることとなった（ジェームス・W・スティグラー，2002）。「jugyou kenkyuu」という英語が誕生したほどである。しかし，ここで評価された対象は，あくまでも小学校算数，中学校数学の授業である。国際的に脚光を浴びている小学校，中学校の授業に比べると，高等学校数学の授業はまだまだ多くの問題点を抱えているといえよう。

それでは，高等学校の授業はどのような課題を抱えているのか。また，授業改善のための方策としてどのようなものが考えられるのであろうか。高等学校の授業改善を阻む要因の1つとして，大学受験を挙げることができる。しかし，その状況は，高校受験を抱える中学校の場合も同じはずである。大学受験によって生ずる諸問題を克服し，高等学校数学の授業を改善する方策はあるはずである。その1つとして期待できるのが，現行の学習指導要領より新たに導入された「数学的活動」であると考える。

本稿では，この「数学的活動」に焦点をあて，授業改善への示唆を得ることを目的とする。

2．数学的活動について

まず，数学的活動の意義や具体的な内容について明らかにする。「数学的活動」という用語は，平成10年告示の学習指導要領の目標に次のような形で記述されている。（下線部は筆者による。）

> 数学における基本的な理念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

高等学校学習指導要領解説－数学編・理数編－では，数学的活動を次のような思考活動であるとしている（1999）。

> ・身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動
> ・設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し，その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等（以下「数学的知識」という。）を構成する活動
> ・数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

すなわち，「課題を設定する」「理論・定理等を構成する」「振り返ったり，活用したりする」といった活動が重視されていることが読み取れる。

さらに，数学的活動の目的として，次の3点を挙げている。

> ・身近な事象との関連を一層図り，数学化の過程を重視する。
> ・主体的に様々な問題解決の方法を味わったり，問題解決の後も自らの思考過程を振り返ったり，その意味を考え，より発展的に考えたり，一般化したりして問題の本質を探ろうとするなど，数学的考察・処理の質を

高める。

・見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり，見いだした数学的知識をいろいろな場面に活用したりする。

ここからは，さらに「発展的に考えたり一般化する」等の活動を強調していることが読み取れる。そして，全体を通して「身近な事象を数学化する」活動が重視されていることがわかる。

日本数学教育学会研究部高等学校部会は，上記の記述を踏まえた上で，数学的活動を次の７つにとらえ直している（2005）。

①事象を数学の記号・約束で表現する。
②事象を数学化し，数学的な課題を設定する。
③設定した課題を既習事項や公理・定理を基にして，数学的に考察・処理する。
④似た数学の問題を作り，解決する。
⑤数学的性質等を論理的に系統化する。
⑥他の具体的な事象の考察などに数学的性質を活用したりする。
⑦数学的に表現されたことを，コンピュータ等でシュミレーションする。

また，長尾は「数学的活動とは，数学を学習する際の生徒の主体的活動である」として，活動の主体性を強調している。さらに，数学的活動の例として，次のようなものをあげている（2004）。

・数学のある内容について学習するとき，その概念にあてはまる具体例はどのようなものか，その概念を拡張することはできないのか，その概念を拡張するために必要なことは何かなどを考える。
・問題を解決するとき，これまで似たような問題はなかったか，これまでの解決方法は使えないか，問題を特殊化するとどうなるのか，具体的に１つ１つの場合を当たっていくとどのようなことが引き出せるのかなどを考える。

渡邊は「数学における認識の深まりを助長する行為を遍く数学的活動という」として，数学の認識を深めるための数学的活動の意義を強調している（2004）。

両者の主張は，数学的活動をより広範なものとして捉えているように感じる。

筆者も，ここでは数学的活動を「身近な事象を数学化する」活動の範囲に限定せず，より広い意味に捉え，「生徒が主体的に数学の認識を深める活動」を数学的活動と呼ぶことにする。

３．高等学校における数学授業と数学的活動

ここでは，高等学校数学の授業に，数学的活動がどの程度行われているかについて，平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査，および平成 13 年度小・中学校教育課程実施状況調査の結果をもとに考察する。

(1)　教師質問紙から

まず教師質問紙から，教師が行っている授業形態の傾向を分析する。

数学的活動に関わる３つの質問項目「コンピュータを活用した授業を行っていますか。」，「作業的・体験的な活動を取り入れた授業を行っていますか。」，「実生活における様々な事象との関連を図った授業を行っていますか。」のそれぞれの結果は，表 1～表 3 の通りである。

表1　コンピュータを活用した授業（%）

	行っている方だ	どちらかといえば行っている方だ	どちらかといえば行っていない方だ	行っていない方だ	無回答
高	0.7	1.9	8.0	88.5	0.9
中1～3	1.0	4.1	17.4	77.1	0.4
小5･6	5.9	14.3	31.8	47.7	0.3

表2　作業的・体験的な活動を取り入れた授業（%）

	行っている方だ	どちらかといえば行っている方だ	どちらかといえば行っていない方だ	行っていない方だ	無回答
高	3.9	16.5	27.2	51.2	1.2
中1～3	5.1	27.4	45.0	22.1	0.4
小5･6	16.3	51.6	27.7	4.3	0.2

表3　実生活における様々な事象との関連を図った授業（%）

	行っている方だ	どちらかといえば行っている方だ	どちらかといえば行っていない方だ	行っていない方だ	無回答
高	3.1	26.6	41.9	27.1	1.2
中1～3	6.1	37.9	43.7	11.8	0.6
小5･6	11.5	50.9	33.4	3.6	0.5

これらの結果から，次のことを指摘できる。

コンピュータを活用した授業については，小・中・高を通して，行っている教師は少ないことがわかる。特に高等学校の場合は，「行っている方だ」「どちらかといえば行っている方だ」を合わせても，3%にも満たない。コンピュータは各学校に設置されていると考えられるが，少なくとも算数・数学の授業ではほとんど使われていない実態が読み取れる。

作業的・体験的な活動を取り入れた授業については，「行っている方だ」「どちらかといえば行っている方だ」を合わせると，小学校の場合は60%を超えているが，それに比べて中学校の場合は約33%と少なく，高等学校の場合は約20%とさらに少ないことがわかる。

実生活における様々な事象との関連を図った授業については，「行っている方だ」「どちらかといえば行っている方だ」を合わせると，小学校の場合は60%を超えているが，それに比べて中学校の場合は34%と少なく，高等学校の場合も約30%と同様に少ないことがわかる。

学校段階が上がるにつれて，それぞれの割合が減少する傾向があるが，指導内容がより抽象的になっていること，内容量が増加していて時間的にゆとりがないこと等が影響しているといえよう。

学習内容の理解を深め，生徒に学ぶ意義を実感させる上では，コンピュータを活用したり，作業的・体験的な活動を取り入れたり，実生活との関連を図った授業は大いに有効であるといえる。しかし，実際にはこのような授業は，高等学校であまり行われていない実態が明らかになった。

(2) 生徒質問紙から

次に生徒質問紙から，数学の授業や勉強に対する生徒の意識を分析する。

数学的活動に関わると考えられる3つの質問項目「数学の勉強は，入学試験や就職試験に関係なくても大切だ。」，「数学を勉強すれば，私のふだんの生活や社会生活の中で役立つ。」，「数学を勉強すれば，私は，論理的に考えることができるようになる。」のそれぞれの結果は，表4～表6の通りである。

表4 数学(算数)の勉強は，入学試験や就職試験に関係なくても大切だ（%）

	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらかといえばそう思わない	そう思わない	分からない	無回答
高	11.9	27.7	25.0	26.4	8.5	0.5
中1～3	36.1	30.9	14.7	11.4	6.2	0.7
小5･6	52.2	28.1	7.4	7.4	6.3	1.0

表5 数学(算数)を勉強すれば，ふだんの生活や社会生活の中で役立つ（%）

	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらかといえばそう思わない	そう思わない	分からない	無回答
高	8.9	24.4	24.2	33.9	8.2	0.5
中1～3	26.3	30.0	16.9	15.5	10.7	0.7
小5･6	45.6	30.0	9.3	5.7	8.4	1.1

表6 数学(算数)を勉強すれば，私は，論理的に考えることができるようになる（%）

	そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらかといえばそう思わない	そう思わない	分からない	無回答
高	9.3	17.3	21.2	37.6	14.2	0.5
中1～3	16.5	21.5	21.5	20.3	19.4	0.7
小5･6	22.5	27.8	17.8	9.6	21.2	1.2

これらの結果から，次のことを指摘できる。

数学(算数)の勉強に対して大切であると考えている子どもは，「そう思う」「どちらかといえばそう思う」を合わせると，小学生，中学生の場合は，約80%，67%と，いずれも半分以上であるが，高校生の場合は，約40%と半分に満たない。このことから，高校生は，数学の授業を試験のために仕方なく受けていて，授業の内容も「試験のための内容」ととらえている生徒が少なくないことが読み取れる。

数学の勉強が生活の中で役立つと考えている子どもは，「そう思う」「どちらかといえばそう思う」を合わせると，小学生，中学生の場合が約76%，56%であるのに対して，高校生の場合は約33%と少ない。教師質問紙の表3の結果と合わせて考えると，高校の授業では，「生活の中で役立つ」ような内容を扱っていないことが多いといえそうである。

数学の勉強が論理的に考える力を育成すると考えている子どもは，「そう思う」「どちらかといえばそう思う」を合わせると，小学生の場合が約 50%，中学生の場合が 38%，高校生の場合が約 27%と学校段階が上がるにつれ少なくなっている。このことから，高校の授業では，論理的に考える場面が少ないことが読み取れる。一般に，数学教育の重要な目的のひとつとして，「論理的に考える力を育成する」ことが挙げられる。そして，学校段階が上がるにつれ，内容も徐々に抽象的になり，論理的に考える必要のある場面は増えると考えられるが，子どもは，逆に学校段階が上がるにつれ，論理的に考えないようになっていると感じていることがわかる。

以上の点から，高等学校の数学の授業の課題について，次のようにまとめることができる。

① 数学を勉強することは大切であることを，生徒に実感させる授業があまり行われていない。

② 日常の生活と関連付けた授業があまり行われていない。

③ 論理的に考える場面を取り入れた授業があまり行われていない。

④ 体験や活動を取り入れた授業があまり行われていない。

したがって，このような現状においては，「生徒が主体的に数学の認識を深める数学的活動」は，授業の中であまり行われていないことが推察される。

4．教科書記述に見る「数学的活動」

次に，教科書の中に「数学的活動」に関連する記述がどの程度あるかについて分析する。教科書は，必修科目である「数学Ⅰ」とし，中学校数学の教科書も発行している 2 社（東京書籍，啓林館）について調査した。調査の観点は以下の通りである。

・生徒に「主体的な活動」を促すような問いかけや問題があるか。

・いきなり性質や定理，公式を提示するのではなく，いくつかの例を考察する活動を通して，それらを構成しているかどうか，

なお，対象としたのは本文が中心であり，章扉や章末問題等は対象外とした。

その結果，図 3，図 4 のような「数学的活動」に関連する記述が見られた。

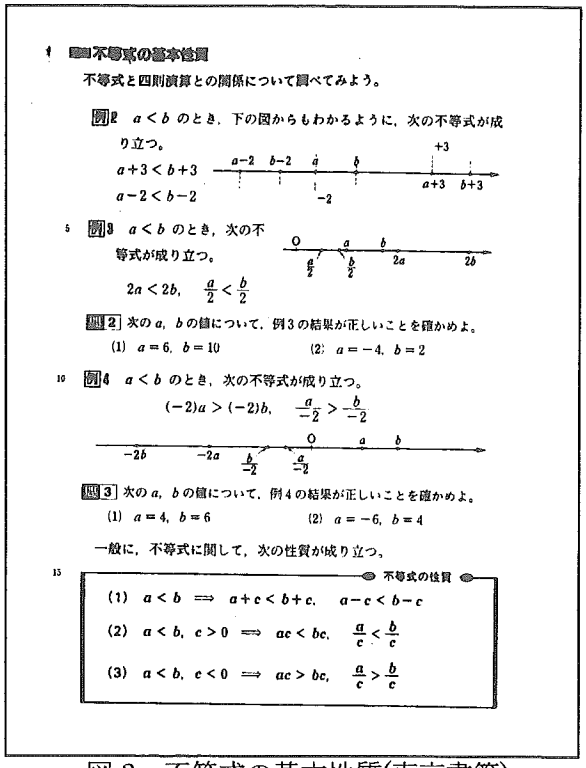
図 3 では，不等式の基本性質について，最初に「不等式と四測演算との関係について調べてみよう」という活動を促す誘導文があり，その後具体的ないくつかの例を通して，基本性質をまとめている。

図 4 では，2 次関数のグラフと x 軸との共有点について，最初に「2 次関数のグラフと x 軸との共有点の様子を調べてみよう」という活動を促す誘導文があり，その後具体的ないくつかの例を通して，基本性質をまとめている。

いずれも，成り立つ性質をいきなり提示するのではなく，いくつかの例を調べる活動を取り入れ，結論を導いている。「調べてみよう」という投げかけに応じて，生徒が主体的に調べる活動を行うとすれば，それは「数学的活動」を行っているといえるであろう。

しかし，上記のような「数学的活動」に関連する記述は少なかった。多くの記述は，「用語や概念の説明」→「性質，定理，公式等の提示」→「証明」→「性質，定理，公式等の適用問題例」→「練習問題」の順に記述されている。

以上の結果から，教科書の中にも，「数学的活動」を促す記述は決して多くないことが明らかになった。



1 不等式の基本性質

不等式と四則演算との関係について調べてみよう。

例2 $a<b$ のとき，下の図からもわかるように，次の不等式が成り立つ。

$a+3<b+3$

$a-2<b-2$

例3 $a<b$ のとき，次の不等式が成り立つ。

$2a<2b$, $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}$

問2 次の a, b の値について，例3の結果が正しいことを確かめよ。

(1) $a=6$, $b=10$ (2) $a=-4$, $b=2$

例4 $a<b$ のとき，次の不等式が成り立つ。

$(-2)a>(-2)b$, $\frac{a}{-2}>\frac{b}{-2}$

問3 次の a, b の値について，例4の結果が正しいことを確かめよ。

(1) $a=4$, $b=6$ (2) $a=-6$, $b=4$

一般に，不等式に関して，次の性質が成り立つ。

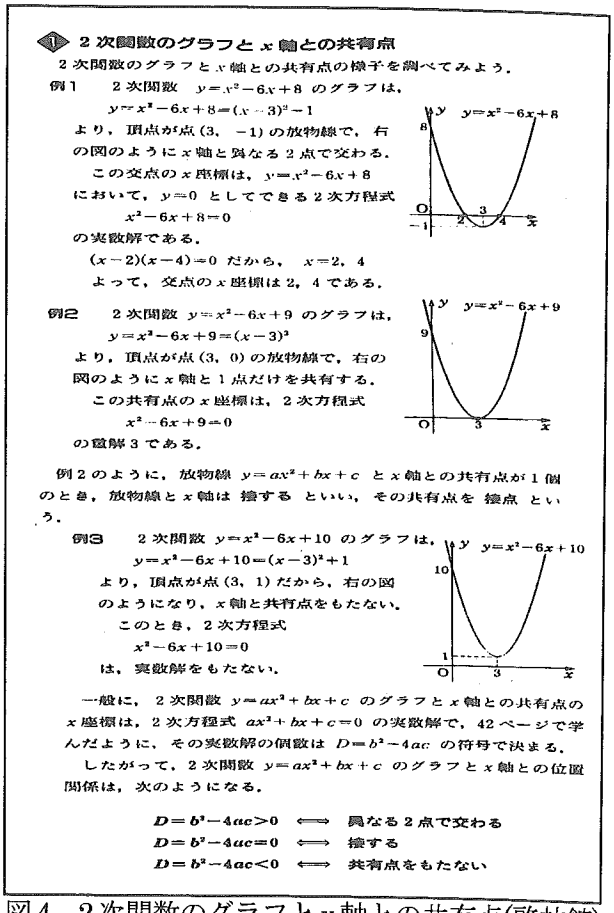
不等式の性質

(1) $a<b \Longrightarrow a+c<b+c$, $a-c<b-c$

(2) $a<b$, $c>0 \Longrightarrow ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

(3) $a<b$, $c<0 \Longrightarrow ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

図3　不等式の基本性質(東京書籍)



1 2次関数のグラフと x 軸との共有点

2次関数のグラフと x 軸との共有点の様子を調べてみよう。

例1　2次関数 $y=x^2-6x+8$ のグラフは，

$y=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$

より，頂点が点 $(3, -1)$ の放物線で，右の図のように x 軸と異なる2点で交わる。

この交点の x 座標は，$y=x^2-6x+8$ において，$y=0$ としてできる2次方程式

$x^2-6x+8=0$

の実数解である。

$(x-2)(x-4)=0$ だから，$x=2, 4$

よって，交点の x 座標は 2，4 である。

例2　2次関数 $y=x^2-6x+9$ のグラフは，

$y=x^2-6x+9=(x-3)^2$

より，頂点が点 $(3, 0)$ の放物線で，右の図のように x 軸と1点だけを共有する。

この共有点の x 座標は，2次方程式

$x^2-6x+9=0$

の重解3である。

例2のように，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点が1個のとき，放物線と x 軸は 接する といい，その共有点を 接点 という。

例3　2次関数 $y=x^2-6x+10$ のグラフは，

$y=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

より，頂点が点 $(3, 1)$ だから，右の図のようになり，x 軸と共有点をもたない。

このとき，2次方程式

$x^2-6x+10=0$

は，実数解をもたない。

一般に，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解で，42ページで学んだように，その実数解の個数は $D=b^2-4ac$ の符号で決まる。

したがって，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は，次のようになる。

$D=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow$ 異なる2点で交わる

$D=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow$ 接する

$D=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

図4　2次関数のグラフとx軸との共有点(啓林館)

5．数学的活動を促す内容としての離散数学

高等学校の数学の授業に「数学的活動」を取り入れ，授業改善を促すためには，どうすればよいであろうか。その方策の1つとして期待できるのが，離散数学の導入であると考える。

離散数学に関する特徴について，景山は次の4つを挙げている（2006）。

(特徴1)　問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できる。

(特徴2)　能力（アイデア）に応じて多様な解法が考えられる（着想の転換）。

(特徴3)　身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすい。

(特徴4)　アルゴリズムの開発が中心的な課題の一つである。

各特徴から，数学的活動を促す上で，次のようなメリットが考えられる。系統的である数学は，指導する上でもある程度系統的に指導した方が，生徒にとっても理解しやすいし効率的に指導できるといえよう。そのことは逆に，生徒が主体的に考える場を少なくしてしまうことにもつながる危険性がある。その点離散数学は，特徴1にあるように，必ずしも系統的に指導する必要はなく，したがって生徒が主体的に考える場面が作りやすいといえるであろう。前提となる知識や技能が少ないため，それまで数学を苦手としている生徒にとっても取り組みやすい。また，定理を導くことよりも，定理を適用する問題解決が中心になりがちな従来の指導に対して，特徴4からは，問題解決の方法を主体的に見つける活動を行いやすい点がメリットとして挙げられる。さらには，特徴3から，生徒が興味・関心を持って活動に取り組むことが期待できる。

国宗は，高等学校数学の授業改善の着眼点の1つに「数学の学習観，授業観を問い直す」ことを

挙げ，その具体的事項として次の２つを挙げている。

① 例題，問の繰り返しから脱却する。

② 演習の質を高める。

上記①，②は，数学的活動を促す事項であり，離散数学は，その特徴から「数学の学習観，授業観を問い直す」上で効果的であるといえるであろう。

以上見てきたことから，離散数学の導入は，数学的活動を取り入れて授業改善を促す上で，有効な方策であると考えられる。

６．数学的活動を促す離散数学の教材例

数学的活動を促す離散数学の教材例については，「高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究」（2005 年度本研究報告書）に，いくつかの実践例が紹介されている。以下では，それ以外の教材例について，いくつか紹介したい。

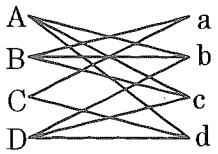
(1) グラフ理論における２部グラフの教材例

【課題 1】 座席の座り方

A～D の男子４人と，a～d の女子４人が，円卓に交互に座る。次のような関係があるとき，互いに知り合い同士が隣り合うように座るのは可能であろうか？

男子	知り合いの女子
A	b，c，d
B	a，b，c
C	a，d
D	b，c，d

解答例）男女別にして，知り合い同士を線で結んだグラフをかく。



このグラフで，A からスタートして，線で結ばれたところをつないで，全員を通って A に戻るコースを考える。例えば次のコースが考えられる。（他にもいくつか考えられる。）

A→c→B→a→C→d→D→b→A

よって，知り合い同士が隣り合うように座ることは可能である。

【課題 2】 河渡り問題

３匹の子豚と３匹の狼が舟で河を渡る。舟は２匹までしか乗れず，両岸で（子豚の数）＜（狼の数）とならないようにするには，どのように渡ればよいか？

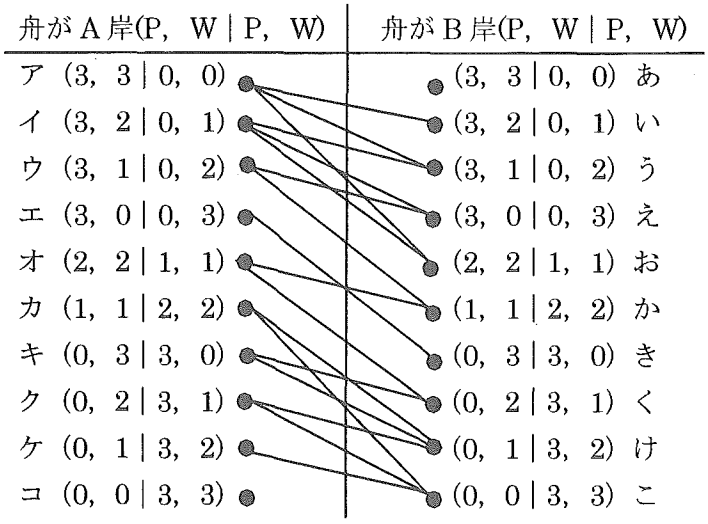
解答例）舟が両岸 A，B にある場合の考えられる局面をすべてあげ（ア～コ，あ～こ），移動可能な局面を線で結んだグラフをかく。（P：子豚，W：狼）

このグラフで，「ア」からスタートして，「こ」まで行く最短コースを考えると，次の通りである。

ア→う→イ→え→ウ→か→オ→く→キ→け→ク→こ
↘お↗ ↘カ↗

よって，上のように渡ればよい。

このとき，最小回数は11回で，渡り方は4通りあることもわかる。



＜指導上の留意点＞2部グラフという用語を覚えることがねらいではなく，2部グラフを利用して問題を解決する生徒の主体的な活動を中心とする。

(2) グラフ理論における平面グラフの教材例

【課題1】 平面グラフゲーム

平面上に5個の点がある。2人が交互に，すでに引いた線と交わらないように，2点を線で結ぶ。ただし，2点の間には線は1本しか引けないものとする。線が引けなくなった方が負けとするとき，このゲームをしてみよう。そして気づいた点をあげてみよう。

また，点の数を6個，7個，…にして，同じゲームをして，気づいた点をあげてみよう。

解答例) ゲームから気づく点

＊5点の場合，9本まで引けるが，10本目は絶対に引けない。

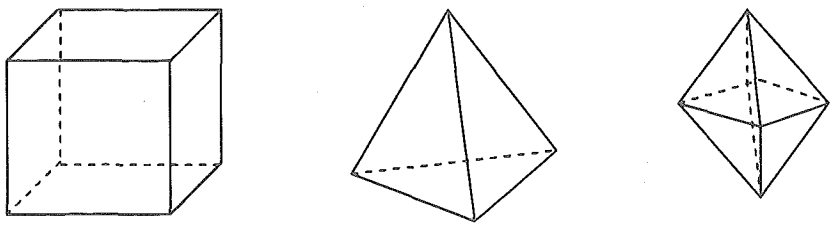
＊6点の場合，12本まで引けるが，13本目は引けない。

＊n点の場合，3n−6本まで引ける。

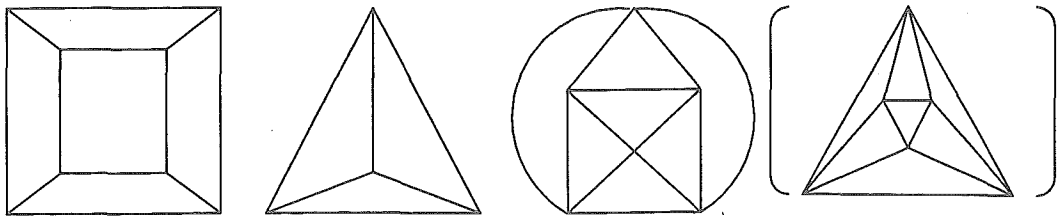
【課題2】 正多面体のグラフ

立方体を，平面上で線が交差しないようなグラフに表してみよう。

また，正4面体，正8面体についても同じように表してみよう。



解答例)



＜指導上の留意点＞平面グラフという用語を覚えることがねらいではなく，平面グラフに表したり，規則性を見つけたりする生徒の主体的な活動を中心とする。

7．おわりに

現行の学習指導要領において「算数的活動」「数学的活動」が新たに強調されるようになったが，小学校算数，中学校数学の授業と比較すると，高等学校数学の授業では，数学的活動は必ずしも積極的に行われていないことを，教育課程実施状況調査の結果や，教科書記述等をもとに考察した。その上で，数学的活動を促す教材として離散数学が有効であることについて言及し，いくつかの教材例を提示し，数学の授業改善のための方策を探った。

今後の課題として，他にも多くの離散数学の教材例を開発し，実践を通してその有効性を明らかにしたい。また，離散数学の導入に際して，いかなる数学の力が育成されるかについても明らかにしていく必要があるであろう。

【参考・引用文献】

飯高茂他．2004．平成14年検定教科書・高等学校数学Ⅰ．東京書籍

ジェームズ･W･スティグラー他．2002『日本の算数・数学教育に学べ』教育出版

景山三平．2006「高等学校へ導入する離散数学の有効性について」日本学術振興会科学研究費基盤研究(B)「高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究」報告書．pp.10-24

国立教育政策研究所教育課程研究センター．2004『平成14年度高等学校教育課程実施状況調査報告書・数学Ⅰ』実教出版

国立教育政策研究所教育課程研究センター．2003『平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書・中学校数学』ぎょうせい

熊倉啓之．2005「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究－図形と方程式の指導に焦点を当ててー」静岡大学教育学部研究報告第36号．pp. 49-64

国宗進．2004「数学教育における授業研究」『高校新数学科の在り方』明治図書．pp.68-79

文部省．1999『高等学校学習指導要領解説－数学編，理数編－』実教出版

長尾篤志．2004「高等学校の新しい数学教育」『高校新数学科の在り方』明治図書．pp.11-20

日本数学教育学会研究部高等学校部会．2005「数学的活動を促す教材開発と指導法の工夫」日本数学教育学会研究部高等学校部会平成16年度研究報告書

渡邊公夫．2004「数学的活動とは何か」『高校新数学科の在り方』明治図書．pp.48-67

山本芳彦他．2004．平成14年検定教科書・高等学校数学Ⅰ．啓林館

高等学校数学科における「４つの観点」に基づく評価の工夫について

―「平成14年度高等学校教育課程実施状況調査(数学Ⅰ)」の調査結果をふまえながら―

山口　武志
福岡教育大学教育学部

【要約】本稿では，教育課程審議会の答申を契機とする評価の改善に関する今日的動向やその背景について概観しながら，高等学校数学科における評価の改善について，次の２つのポイントを指摘した。その１つは，「関心・意欲・態度」「数学的な考え方」「表現・処理」「知識・理解」の４つの観点による「目標に準拠した評価」の一層の充実であり，評価規準に基づく評価の具体化である。第２は，いわゆる「指導と評価の一体化」という視座から，自ら学ぶ意欲や思考力，判断力，表現力なども含めた広義の学力観に基づく授業改善の重要性である。第１について，本稿では特に，平成 14 年度に実施された「高等学校教育課程実施状況調査（数学Ⅰ)」の問題を取りあげながら，４つの観点に基づく評価問題の在り方について考察した。

1. 評価の改善と学力観の転換

算数・数学科に限らず，近年，評価の改善とそれに基づく授業の工夫が求められている。評価に関する今日的動向を把握しながら，高等学校数学科における評価の改善を考えていく上で，次の３つの資料は欠かせないものである。

A．教育課程審議会による「児童生徒の学習と教育課程の実施状況の評価の在り方について(答申)」［平成 12 年(2000 年)12 月，以下「答申」］

B．文部科学省初等中等教育局長による「小学校児童指導要録，中学校生徒指導要録，高等学校生徒指導要録，中等教育学校生徒指導要録並びに盲学校，聾学校及び養護学校の小学部指導要録，中学部生徒指導要録及び高等部生徒指導要録の改善等について（平成 13 年 4 月 27 日付け文部科学省初等中等教育局長通知）」［平成 13 年(2001 年)4 月，以下「通知」］

C．国立教育政策研究所教育課程研究センターによる「評価規準の作成，評価方法の工夫改善のための参考資料（高等学校数学）」［平成 16 年(2004 年)3 月，以下「参考資料」］

Aの「答申」は，今日の評価に関する議論の契機になったものである。Bの「通知」は，「答申」を受けて，指導要録の改善点を具体的に示したものである。この「通知」では，小，中，高等学校において，「総合的な学習の時間」の評価に関する文章記述欄を新設することや，小，中学校においては，「行動の記録」の項目を見直すことが提言されている。また，「答申」は，評価規準や評価方法の研究推進を国立教育政策研究所や大学などの研究機関に求めている。さらに，「通知」では，高等学校の各教科・科目の評定について，「関心・意欲・態度」「思考・判断」「技能・表現」「知識・理解」の４つの観点による評価を十分踏まえることを求めている。Cの「参考資料」は，こうした要請や動向に応える形で，国立教育政策研究所によって提案された高等学校数学科における評価規準の事例である。

「答申」は長文にわたるが，その骨子は次の４点にまとめられる。

(1)学習指導要領が示す目標に照らしてその実現状況をみる評価（目標に準拠した評価，つまり絶対評価）を基本とする。

(2)児童生徒の学習状況を客観的に評価するため，評価規準，評価方法等を研究開発する。

(3)全国的かつ総合的な学力調査を実施する。

(4)各学校において，児童生徒の学習状況や教育課程の実施状況等の自己点検，自己評価を行う。

上記(1)の指摘を受け，とりわけ小，中学校における指導要録の「評定」については，学習指導要領に示す各教科の目標に照らして，その実現状況を総括的に評価すべきことが「通知」において指示された。従来の「絶対評価を加味した相対評価」から「目標に準拠した評価」（絶対評価）に改められたことになる。高等学校における「評定」の取扱いについては，従来から，「目標に準拠した５段階評価」とされており，現行の評価方法を維持することになっている。ただ，ペーパーテスト等による知識や技能のみの評価など，一部の観点に偏した評価が行われることのないように，４つの観点による評価の充実を求めている点が重要なポイントである。

「答申」は，「目標に準拠した評価」を重視するいくつかの理由を指摘しているが，その主たる理由は「学力のとらえ方の見直し」によるものである。実際，「答申」では，知識の量のみで学力をとらえるのではなく，①学習指導要領に示す基礎的・基本的な内容を確実に身につけることはもとより，②自ら学び自ら考える力などの「生きる力」がはぐくまれているかどうかによって学力をとらえるべきである，と指摘されている。上記①のように，基礎・基本の確実な定着を評価するのであれば，「集団に準拠した評価」よりも，「目標に準拠した評価」が望ましいというのである。

このように，「目標に準拠した評価」を一層重視することにはなったが，「集団に準拠した評価」が軽視されたわけではない。実際，クラスや学年などの集団における相対的な位置づけにかかわる情報は，必要に応じて，総合所見欄に記入することとなっている。また，児童生徒一人一人のよい点や可能性，進歩の状況などを評価するため，「個人内評価」の重要性も謳っており，多面的な工夫を求めている。

ところで，「目標に準拠した評価」を基本とする以上，実務面では，評価の観点や評価方法の改善が大きな課題になってくる。例えば，前者については，内容や目標にそって，「何を評価するのか」という質的な判断の根拠（いわゆる「評価規準」）と，「どの程度であるか」という量的な判断の根拠（いわゆる「評価基準」）を具体化することが求められる。高等学校の場合，「評定」については，５段階（「十分満足できると判断されるもののうち，特に程度の高いもの」「十分満足できると判断されるもの」「おおむね満足できると判断されるもの」「努力を要すると判断されるもの」「努力を要すると判断されるもののうち，特に低い程度のもの」）で評価することになっている。Ｂの「通知」においては，４つの観点によって評価を充実することがより明確に打ち出されていることから，「目標に準拠した評価」という視座から，４つの観点による評価をどのように評定に総括していくかということが重要なポイントになっている。実際，「通知」においても，《「観点別学習状況」において掲げられた観点は，分析的な評価を行うものとして，各教科の評定を行う場合において基本的な要素となる》ことが指摘されている。実際には，教科や内容の特性を考慮しながら，観点に重みづけをすることも可能となっており，具体的な評定の工夫は各学校の裁量に委ねられている。いずれにしても，「観点別学習状況」が今まで以上に重要になるため，学習指導要領に示された内容に関する評価規準の策定が求められているのである。

Ｃの「参考資料」は，その重要な指針の１つとなるものである。「参考資料」では，高等学校数学科における教科目標をふまえながら，「評価の観点と趣旨」が表１のようにまとめられている。さらに，表１のような高等学校数学科における評価の観点及び趣旨の下で，「数学基礎」「数学Ⅰ」「数学Ⅱ」「数学Ⅲ」「数学Ａ」「数学Ｂ」「数学Ｃ」の各々の科目について，評価の観点の趣旨

が具体的に示されている。

表１　高等学校数学科における評価の観点及び趣旨

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
数学的活動を通して，数学の論理や体系に関心をもつとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。	数学的活動を通して，数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考えるとともに思考の過程を振り返り多面的・発展的に考える。	事象を数学的に考察し，表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け，よりよく問題を解決する。	数学における基本的な概念，原理・法則，用語・記号などを理解し，知識を身に付けている。

さらに，平成 11 年告示の学習指導要領において必履修科目となっている「数学基礎」と「数学Ⅰ」については，いわゆる「内容のまとまりごとの評価規準」とその具体例が示されており，個々の単元の評価規準を策定する上で参考になる。例えば，表２は，「数学Ⅰ」の内容のうち，「(2)二次関数」の「二次関数の値の変化」に関する評価規準の具体例である。勿論，こうした評価規準は，毎時間の授業レベルでの評価規準を示したものではない。したがって，各都道府県や各学校では，生徒の実態等に応じて，個々の単元や毎時間の授業に関する評価規準の作成が求められる。

表２　「数学Ⅰ」「(2)二次関数」の「二次関数の値の変化」に関する評価規準の具体例

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
・二次関数の値の変化に関心をもち，具体的な事象の考察に二次関数の最大・最小を活用しようとする。	・二次関数の値の変化の様子について，グラフを用いて考察することができる。	・二次関数のグラフや式を用いて，二次関数の最大値・最小値を求めることができる。	・二次関数の最大値・最小値とその求め方について理解し，基礎的な知識を身に付けている。
・二次不等式の解に関心をもち，二次関数のグラフを活用して二次不等式の解を求めようとする。	・二次不等式の解を二次関数のグラフを用いて考察することができる。	・二次関数のグラフを活用して二次不等式の解を求めることができる。	・二次不等式の解の意味を二次関数のグラフとの関係から理解している。

一方，「答申」は，評価方法や時期についても，次のような工夫を求めている。

ア．総括的な評価のみではなく，分析的な評価，記述的な評価を工夫すること。

イ．評価を行う場面としては，学習後のみならず，学習の前や学習の過程における評価を工夫すること。

ウ．評価の時期としては，学期末や学年末だけではなく，目的に応じ，単元ごと，時間ごとなどにおける評価を工夫すること。

エ．具体的な評価の方法としては，ペーパーテストのほか，観察，面接，質問紙，作品，ノート，

レポート等を用い，その選択・組み合わせを工夫すること。

これまで述べた改善点は，児童生徒個人の学習状況の評価にかかわるものである。この他にも，「答申」では，前述の(3)で言及したように，学習状況や教育課程の実施状況について，国あるいは地域レベルで把握することを求めている。例えば，後述する「教育課程実施状況調査」などはその一例である。さらに，情報開示への対応も視野に入れながら，教育課程の実施状況に関する自己点検・自己評価を各学校で行うようにも促している。前述の(4)はこれにかかわるものである。このように，「答申」は，個々の児童生徒レベル，学校レベル，地域・国レベルで評価の充実を指摘していることになる。

こうした動向や指摘の興味深い点は，評価の改善を全面に打ち出しつつも，実質的には指導の改善をねらっていることである。学力にかかわる先の②の指摘にもあるように，評価規準の作成では，「生きる力」や「確かな学力」の育成を考慮することが前提となっている。勿論，評価と指導は表裏一体の関係にあるため，「生きる力」や「確かな学力」の育成を盛り込んだ評価が指導と遊離して行われるわけではない。「生きる力」や「確かな学力」を評価する規準や基準を作成するのであれば，指導においても，その育成が当然工夫されなければならない。いわゆる「指導と評価の一体化」は，こうした期待を込めた用語であり，「答申」のキーワードといってよい。評価規準を具体化する作業を通じて，究極的には，日々の指導を反省し，授業改善を図ることを教師側に求めているのである。したがって，評価の改善に関する今日的議論が単なる評価方法の技術的側面のみにとどまるのではなく，自ら学ぶ意欲や思考力，判断力，表現力なども含めた広義の学力観に基づく授業改善にまで連動していくことが重要といえよう。この点こそが今日的な評価の改善の本質的かつ重要なポイントである，と考える。

2.「4つの観点」に基づく評価の工夫

前節では，今日的な評価の動向とその背景について概観した。既に述べたように，高等学校の各教科・科目の評定については，従来から，目標に準拠した５段階評価とされてきたけれども，「通知」において，４つの観点による評価を行うべきことがより一層明確に示されたことになる。それとともに，評価の在り方の工夫・改善を図るための方策として，具体的な評価規準を設定することになったことが，高等学校における評価の改善にかかわるもう１つの重要なポイントである。

高等学校において，４つの観点による評価が強調されるようになった背景には，これまでの評価が，中間試験や期末試験といったペーパーテストによる「知識・理解」の評価を中心とするものであったことを指摘することができよう。したがって，今後の評価の改善においては，例えば，中間試験や期末試験のようなペーパーテストをはじめ，日々の小テストなどにおいても，４つの観点をみる問題を工夫し盛り込むことが重要である。この点については，前述の「参考資料」においても，次のような指摘がなされている。

《……ペーパーテストについても，「知識・理解」の評価に偏ることなく，「関心・意欲・態度」，「思考・判断」，「技能・表現」の評価も含め，生徒の資質や能力を多面的に把握できるようにすることが重要である。さらに，設問のねらいを評価規準との関連において明確にし，個々の問題を正答したのか，仮に正答に達しなかったとしてもどこまでの解答ができたのか，全体では何割の正答を得たのかといったことが，学習の実現状況と結び付いて解釈できるよう，問題の内容を更に工夫改善することが求められる。》（「第３章　各学校における評価の工夫改善等」，「１各学校における評価規準の設定，評価方法の工夫改善」，「(2)各学校における評価方法の工夫改

善)

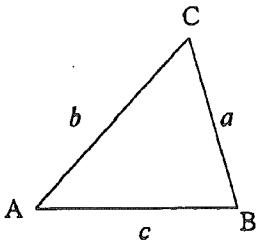
こうした視座からの評価問題の開発にあたって，「平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査（数学Ⅰ）」（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004；以下，「実施状況調査」）におけるペーパーテスト調査は，次の２つの点において示唆に富むものである。その第１として，「実施状況調査」の問題は４つの観点に基づいて作成されているため，文字通り，４つの観点に基づく評価問題の具体例になるという点である。第２は，調査結果についても，４つの評価の観点からの考察がなされており，評価の観点に基づく指導上の改善点が指摘されている点である。

「実施状況調査」は，平成 14 年 11 月に国立教育政策研究所によって実施されたものであり，平成元年告示の高等学校学習指導要領に基づく教育課程について，その実施状況の調査を目的とするものである。高校３年生を対象としながら，「数学Ⅰ」の内容に関するＡ問題，Ｂ問題の２種類のペーパーテスト調査が実施された。両問題の被験者数は，それぞれ約 16000 人である。また，この「実施状況調査」では，生徒と教師の意識を調査するために，質問紙調査も実施されている。

さて，４つの評価の観点のうち，「知識・理解」をみる問題は，高等学校における従来の中間試験や期末試験の問題の中心であり，その問題の作成は比較的容易であると考えられる。そこで，以下では，「図形と計量」における「三角比」「三角比と図形」の内容を例にしながら，「関心・意欲・態度」「数学的な考え方」「表現・処理」にかかわる問題を取りあげてみたい。

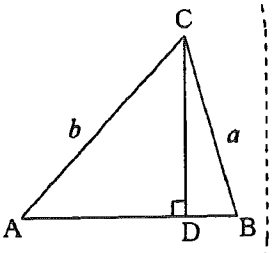
［A 8］

8 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ を証明する授業で，まず右の鋭角三角形ＡＢＣについて $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明の仕方を考えています。



明（あきら）さんは次のような考えを述べました。

右の図のように頂点Ｃから辺ＡＢに垂線ＣＤを引く。
ＣＤの長さをもとにして考えれば証明できると思う。



明さんの考えを参考にして，鋭角三角形ＡＢＣについて $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明を［　　］の中に書きなさい。

上記A8は，「明さんの考え」をもとにしながら，鋭角三角形において正弦定理が成り立つことを証明する問題である（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004，pp.66-68)。正弦定理が図形の計量の考察に有用であることに気付き，活用しようとしているかどうかをみる問題であるとともに，「明さんの考え」を参考にしながら，正弦定理の証明を的確に表現できるかどうかをみる問題でもある。その意味で，A8は，「関心・意欲・態度」及び「表現・処理」の観点に関する問題として位置づけられている。

A8の通過率は 24.0%であり，設定通過率 40%を下回っており，決して良好とはいえない。また，「無解答」が 61.9%にも及んでいる点も大きな課題である。通過率の低さや無解答の反応率の高さを鑑みるとき，証明の過程を丁寧に理解させることが重要であるとともに，それを言語的表現や記号的表現によって，適切に表現する能力を育成することが求められる，といえよう。

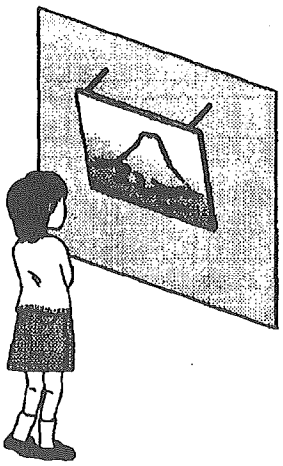
次のB8は，余弦定理に関する問題であり，日常的な場面において，三角比を活用しながら長さや角度を求めることができるかどうかを問うものである(国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004，pp.68-69)。

[B8]

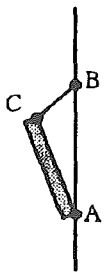
8 邦子（くにこ）さんは，図１のように写真のパネルを壁にかけようとしています。

図２は，邦子さんがパネルをかけた状態を想定し，真横から見た様子をかいたものです。

点Ａはパネルの下端，点Ｂはひもを留める壁の位置で，ともに固定されています。また，点Ｃはひもを留めるパネルの上端で，ＡＢ＝100 cm，ＡＣ＝80 cmです。



（図１）



（図２）

邦子さんは，パネルが見やすいようにＢＣをいろいろな長さに変えています。

ＢＣ＝ 40 cm とすると，∠ＣＡＢの大きさはおよそ何度になるでしょうか。下の正弦定理または余弦定理を参考にして，∠ＣＡＢの大きさにもっとも近い整数値を，問題の最終ページの三角比の表を用いて求め，その値を［　　］の中に書きなさい。

［　　］(15

この問題では，正弦定理と余弦定理は示されているが（問題文中では略），この問題の解決にあたっては，どちらの公式を利用すればよいかという判断をはじめ，式の変形，正確な計算，三角比の表からの適切な活用など，総合力が要求される。その意味で，B8は，「関心・意欲・態度」及び「数学的な考え方」の観点に関する問題として位置づけられている。

B8の通過率は31.0%であり，設定通過率45%を下回っている。また，この問題においても，「無解答」が42.3%に及んでいる。A8やB8に関する調査結果より，正弦定理や余弦定理を問題解決に活用する能力において大きな課題がある，といえる。したがって，これらの内容の学習にあたっては，建物の高さや斜面の角度を求めるといった正弦定理や余弦定理を活用する場面を実際に取りあげながら，正弦定理や余弦定理の理解を図っていくことが重要である。

以上，「興味・関心・意欲」や「数学的な考え方」「表現・処理」に関する問題の具体例を概観したが，「三角比」や「三角比と図形」以外の内容に関する問題も含めて，「実施状況調査」において出題された問題群を評価の観点別に整理し，各問題の設定通過率と比較したものが表３である（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004，p.10；一部筆者修正）。

表３　評価の観点別にみた問題ごとの設定通過率との比較

区分	問題数	A	B	C	通過率(%)	設定通過率(%)
関心・意欲・態度	11	1	1	9	46.9	56.4
数学的な考え方	7	1	1	5	52.1	60.0
表現・処理	14	0	2	12	44.4	57.9
知識・理解	9	0	2	7	57.5	67.2

(注) A：設定通過率を上回ると考えられるもの，B：設定通過率と同程度と考えられるもの
C：設定通過率を下回ると考えられるもの

表３をみると，４つの観点すべてにおいて「設定通過率を下回ると考えられる」問題が多く，どの観点の通過率も設定通過率を下回っていたことがわかる。一方，観点ごとの通過率を比較すると，４つの観点の中では，「知識・理解」に関する問題の通過率が最も高く，他の３つの観点の指導の充実が特に求められる。

「実施状況調査」の問題は，あくまでペーパーテスト形式のものである。「指導と評価の一体化」というキーワードによって強調されているように，実際の指導においては，個々の内容や目標にそって，４つの観点を意識した指導計画を具体化し，指導を改善することが望まれる。また，４つの観点に基づいて，生徒の理解の実態を分析的に考察し，指導にフィードバックすることも重要である。

3. 高等学校数学科における指導上の改善点と「離散数学」の教材に対する期待

「実施状況調査」では，ペーパーテスト調査の結果や，教師質問紙調査及び生徒質問紙調査の結果に基づきながら，高等学校数学科における学習指導上の改善点が指摘されている。そのポイントを要約すれば，以下のとおりである（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2004，pp.109-115）。

(1)基本的な概念や用語・記号の意味の理解など，基礎・基本の確実な定着を図ること
(2)授業の中で，生徒一人一人の考えを生かす指導を工夫すること
　①多様な考えによってアプローチできる教材を開発すること
　②生徒の誤答や誤った考えを授業において積極的に活用すること
　③問題解決の過程を振り返る機会を授業に積極的に取り入れること
　④コンピュータや電卓などを積極的に活用すること
(3)生徒が自分の考えを表現し合い，お互いの考えを比較したり検討したりする授業を工夫すること
(4)数学学習の意義や必要性を実感する授業となるよう工夫すること

これらの指摘は「数学Ⅰ」の学習指導上の改善点を指摘したものではあるが，その多くは，他の科目にも共通するものであると考える。

こうした指導上の改善点を意識しながら，「実施状況調査」において明らかになった「関心・意欲・態度」や「数学的な考え方」や「表現・処理」といった各観点にみられる課題を克服する上で，「離散数学」の教材は有益である，と考える。例えば，グラフ理論の教材など，離散数学にかかわる教材の多くは，具体的な事象を数学化しながら，事象の本質的構造を数学的モデルに翻訳し，それを数学的に処理する過程など，いわゆる「数学的活動」を体験させる豊富な場面を提供してくれる。

また，日常事象との関連性も強く，その問題の解決を通して，数学の有用性を感得させる上でも有用であると考える。さらに，離散数学の教材によって，生徒たちの多様な考えを引き出しながら，自分の考えを表現したり，他者の考えと比較検討する機会を増やすことも可能になるとも考えられる。このような理由から，離散数学にかかわる教材は，上述の課題の克服にとって有望であると思われる。その意味で，今後，離散数学の教材とその評価方法に関する一層の研究開発が期待される。

[引用・参考文献]

教育課程審議会(2000).『児童生徒の学習と教育課程の実施状況の評価の在り方について(答申)』（平成12年12月）.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2004).『評価規準の作成，評価方法の工夫改善のための参考資料（高等学校数学）－評価規準，評価方法等の研究開発（報告）〔抄〕－』（平成16年3月）.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2004).『平成14年度高等学校教育課程実施状況調査(数学・数学Ⅰ)』，実教出版.

長尾篤志・景山三平・長崎栄三編(2006).『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』(日本学術振興会科学研究費補助金・基盤研究(B)研究成果報告書，課題番号:16300258).

離散数学の授業における生徒の学習活動の評価

二宮 裕之
埼玉大学教育学部

【要約】離散数学を課題とする学習活動では、生徒は「言葉での説明」を有効に活用し表現していくことが求められてくるとの想定のもと、数学教育における記述表現,並びに記述表現活動についての先行研究、及びその具体的な事例について検討した。更に、記述表現を評価する枠組みとして、評価のための規準(Criteria)を設定し、その記述尺度(Descriptive Scale、ルブリックと呼ばれる)をもとに評価者の一般的（全体的）印象を評価する「全体論的評価法」について考察した。そして、具体的事例として鳩ノ巣原理の授業での問題を取り上げ、生徒の記述の事例と全体論的評価における記述尺度(ルブリック)の案を示すことで、全体論的評価法の具体例を提案した。

1．はじめに

本研究における平成17年度報告書において長尾･長崎(2006)は、新しい教材開発の必要性の一つとして「(2) 数学をじっくり考えさせたい」という点をあげ、その詳細について以下のように述べている。(p.6、傍線筆者)

> 数学が分かるようになるためには。基本的な概念を批判的に、試行錯誤しながら学ぶことが必要である。中学校の内容を十分に身に付けず高等学校に入学してくる生徒が少なくないと言われる現状を考慮すれば、あまり多くの予備知識を仮定しなくても、それぞれの生徒が自分なりのやり方で試行錯誤しながらアプローチでき、じっくり考えることのできる内容をも準備する必要がある。

また景山(2006)は、離散数学の特徴の一つとして「(4) アルゴリズムの開発が中心的な課題の一つである(p.11、傍線筆者)」ことをあげた。そして離散数学に関連した教材で育成できる特性の一つとして「(7) 言葉での説明が多いことに起因する論理的表現力(p.12、傍線筆者)」をあげている。 更に、指導上の留意点として以下の3点をあげた。(p.13)

(1) 多様で十分な思考活動時間の確保
(2) アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化
(3) 基本的にはグループ学習形態での実施（一斉授業では行わない）

高等学校数学において離散数学を導入する際、「多様で十分な思考時間」を確保することは、自分なりのやり方で試行錯誤しながらじっくり考え、アルゴリズムの背後にある考え方やアイデアの意識化を促すことになろう。またグループ学習形態を基本としてアルゴリズムの開発を中心的な課題の一つとすることから、多様な回答が生み出されることが想定される。これらの特質から、離散数学を課題とする学習活動では、生徒は「言葉での説明」を有効に活用し表現していくことが求められてくると考えることができる。

本稿では、言葉での説明に代表される「言語的表現による記述」が数学学習において活用されている先行事例を検討した上で、それを評価する方法として『全体論的評価法』の離散数学の学習課

題への援用について提案する。

2．記述表現を活用する数学学習の事例

米国数学教師協会(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)が 1989 年に刊行した『学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics、NCTM スタンダード)』は、アメリカ国内はもちろん、世界の数学教育に影響を与えるものであった。NCTM スタンダードでは、全学年に共通する基準として「コミュニケーションとしての数学」をあげ、算数・数学学習におけるコミュニケーションの重要性を指摘している。例えば、スタンダードで掲げられている「生徒のための新しい目標」５つのうちのひとつに「数学的にコミュニケーションすることを学ぶ」があげられており、「生徒は、自分のアイデアをコミュニケーションする時、自分の思考を明らかにでき、洗練し、整理することを学ぶ」といった指摘がみられる(p.6)。また、「口頭ないし筆記で考えた過程(thinking)を説明することを促される発問(Problem question)は、表現している考えを生徒がより明確に理解することを促す」(p.27)、「知識は、話し合うこと、書くこと、言うこと聞くこと、読むことを通して獲得される」(p.214)、といった記述に見られるように、生徒は表現すること（コミュニケーション）を通して数学を学習していくという主張が展開されている。更に、「数学を表現したり、議論したり、読んだり、書いたり、聞いたりすることは、数学を学び用いる際の主要部分である」(p.26)、「すべての生徒は、数学の考えを聞き、それについて読み、書き、話し、反省し、証明する広範な経験を必要とする」(p.140)、「書くことは（学校）数学においてごくまれにしか使われてこなかったコミュニケーション技能である。それは、とりわけ重要である」(p.28)、といった記述から、コミュニケーションの様々な形態の中で記述による表現を重視していることがわかる。つまり記述表現を、算数･数学学習において従前から行われてきていた口頭でのコミュニケーション（話すこと、聞くこと、議論）と等しく重要なものとしているのであり、更にこれまでの算数･数学学習においてあまり行われてきていないという点から、特に記述表現活動の重要性を強調している。

このような勧告を受け、1990 年代半ばには NCTM スタンダードに準拠した新しいカリキュラムが次々に刊行された。NCTM スタンダードでは数学的記述表現活動の重要性を明確に示している。従って、スタンダードに準拠するこれらのカリキュラムでは、いずれも「書くこと」が重要な位置を占めることとなった。本小節では、NCTM スタンダード準拠カリキュラムにおける「書く」活動の具体的事例のいくつかを示すことで、数学学習において記述表現を活用する事例を紹介したい。

(1) STEM カリキュラムにおける「Extend Exploration (E^2)」課題

STEM カリキュラムにおける特徴の一つに「Extend Exploration (E^2)」と呼ばれる課題がある。E^2は日常的な場面でのかなり複雑な数学的事象を取り上げたもので、通常１～２週間かけて主に家庭学習として問題解決を行う。そして生徒は自分なりの解答をレポートの形式にして提出するものである。例えば、第７学年で図１のようなE^2の課題がある(Billstein et. al., 1999, p.116)。そしてこの課題に対してある生徒は図２のような記述を行っている(1)。

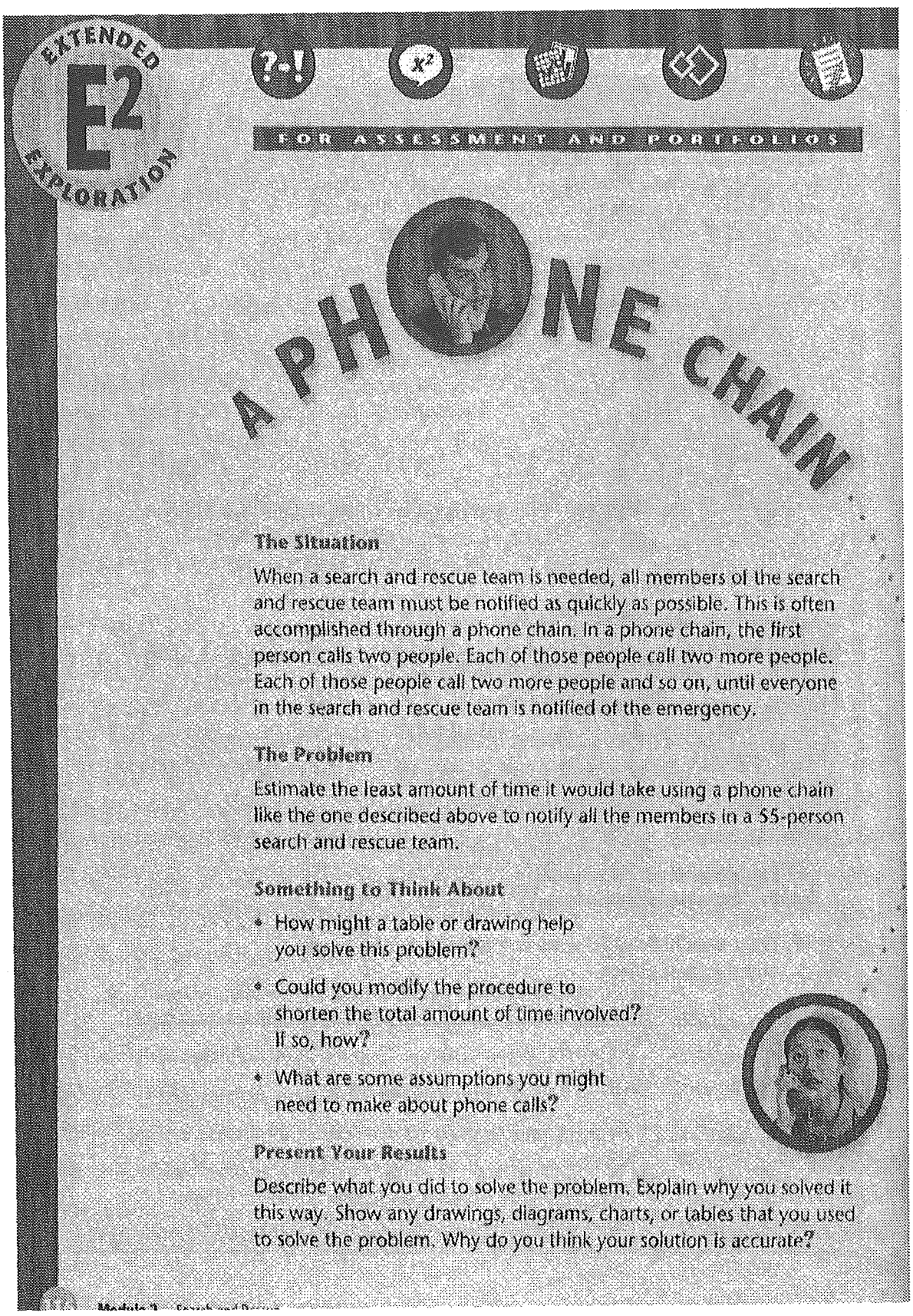


図1　STEMカリキュラムにおけるE^2の問題(Billstein et. al., 1999, p.116)

ある人が遭難して、あなたが55人の人に連絡をし救助を依頼する場合、下図にあるように、あなたが2人に連絡しその2人がそれぞれ他の2人に連絡し、という風になります。ここにはいくつか問題点があって、例えば家を留守にしていたり電話が聞こえなかったりといったこともありえます。そこで、全員がポケベルか携帯電話を持っていて、誰がどこにいても必ず連絡が取れるということにします。もうひとつの方法は、全員がどこにいるかを表示する装置をみんなが持っていて、ボタンひとつで全員に連絡が取れるといった場合です。そうすれば、いちいち全員に電話をしなくても済みます。

私が問題解決に用いた方法は、すべての人と連絡をとるためのまた別の考え方です。私は問題解決の補助として表も用いました。それから、解法はすべて私の頭の中で考えました。この方法で問題解決を行った理由は、それが簡単で、かつそれでも正確で、さらにいろいろな方法で考えることができるからです。55人に連絡をとる方法を考える際に、私は表をつくりました。

私は、すべての人がポケベルか携帯電話を持っていると仮定しました。このことから、全員と確実に連絡をとることができます。1.すばやく連絡をすること、2.全員もれなく連絡すること。そうすれば、連絡ミスを防ぐことができます。

私がポケベルや携帯電話に連絡をする際に、携帯電話で4～5分、携帯電話は3回ベルを鳴らしておよそ5分とします。約半数の人がポケベルを持っていて、残りの半分が携帯電話を持っているとします。ポケベル27人、携帯電話28人、とすると、連絡に要する時間は4時間58分になります。

図2　STEM カリキュラムの E^2 課題に対する生徒の記述の事例(1)

(2) IMP カリキュラムにおける「ポートフォリオ・カバーレター」

IMP カリキュラムにおける大きな特徴の一つがポートフォリオの作成である。1ヶ月から1ヶ月半程度の期間で学習される各単元のそれぞれにおいて、単元の学習の総まとめとしてポートフォリオは作成される。そして単元の学習の総まとめとしてカバーレターと呼ばれるレポートを作成することが、ポートフォリオ作成における最も重要な作業となる(Green,1997,p.34)。図3は第9学年の方程式の単元「Solve It!」でのポートフォリオ作成についての教科書の記述である(Fendel et. al.,1998(a))。また、生徒が作ったこの単元のポートフォリオのカバーレターの事例(2)を図4に示す。

"Solve It!" Portfolio

Now that *Solve It!* is completed, it is time to put together your portfolio for the unit. This activity has three parts.

- Writing a cover letter summarizing the unit
- Choosing papers to include from your work in this unit
- Comparing this unit to Year 1 IMP units and to traditional algebra

Cover Letter for "Solve It!"

Look back over *Solve It!* and describe the main mathematical ideas of the unit. This description should give an overview of how the key ideas were developed. In compiling your portfolio, you will be selecting some activities that you think were important in developing the key ideas of this unit. Your cover letter should include an explanation of why you selected particular items.

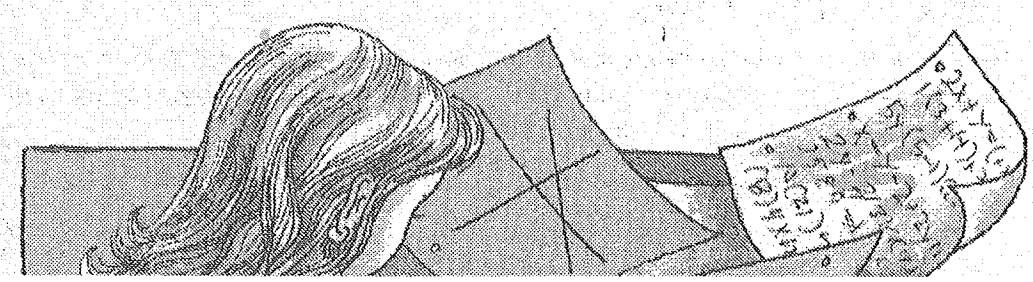


図３　ポートフォリオ作成についての教科書の記述 (Fendel et. al., 1998(a),p.225)

私の名前はShannon Lindgun、Patrick Henry高校の生徒です。IMP2の数学の時間で、私たちはちょうど「Solve It!」の単元が終わったところです。

この単元では、方程式やグラフの問題を解くことを学びました。私たちが学習した数学的トピックは、幾何と代数です。

POW というのは今週の問題のことです。この課題は多くの思考を要求してきます。私が気に入ったPOWはPOW0です。なぜならそれはとてもやりがいがあったからです。

問題の考え方を会得するまでに、かなりの時間が必要でした。次の単元のPOWでも、この単元で私がやったように、よりよいPOWを行う予定です。

宿題や授業課題は私にとって重要でした。というのも、私はそれを一生懸命行い、そのいくつかは理解するのにとても大変だったからです。

この単元で私は、方程式の解き方とそれをグラフ上に表すことについて学びました。私は宿題や授業での課題をきちんと行いました。（しかし）授業に集中する必要があるみたいです。

Shannon Lindgun

図４　生徒が作成したカバーレター(2)

3．数学学習における記述表現を評価する枠組み

記述表現を評価する方法としてすべての教科領域において用いることのできるものの一つに「全体論的評価法(Holistic Grading／Holistic Scoring)」がある。この評価法は、従来の標準化された規範参照的テスト(norm-referenced test)による評価に代わるものとして、特に1990年代の教育改革における「学習評価の再設計(Redesign)」を求める動きの中で注目を集めたものである(Ainsworth et. al., 1998, p.1)。この方法は一貫性をもって短時間に多くの記述を評価することができる、公平かつ効果的な方法であるとされている(Anson,1997,p.89)。具体的には、評価のための規準(Criteria)をいくつか設定し、読者（評価する人）の一般的（全体的）印象をそれらの規準に照らし合わせ評価するものである。評価の規準をもとにした記述尺度はルブリック(Rubric)とも呼ばれ、評価が主観的にならないようにする働きをもつ(Bratcher,1994, p.44)。ルブリックについては数学教育の分野でも紹介されており、Assessment Standards for School Mathematics (NCTM,1995)はルブリックを「課題や活動の採点を方向づけるような、信頼できる一連のルール(p.90)」としている。

Anson(1997)は全体論的評価法の手順を図５のように述べた。

(1) 評価規準を設定する。
(2) 規準に従い記述尺度(Descriptive Scale)を設定する。（＝ルブリックの作成）
(3) 評価規準を鮮明にするようなモデル答案を選ぶ。
(4) いくつかの答案を評価し判断の規範をつくる。
(5) 評価を行う。判断に困るケースについては最後に再検討する。

図５　全体論的評価法の手順（Anson,1997,p.89）

そしてこの評価法を図６のように特徴づけている。

- 複数の教師が協同して指導する際に有効である。
- （規準を示すことで）教師が求めるものを生徒が理解することを助け、生徒がよりよい活動を行う動機となる。
- （記述の）包括的な印象を得ることができる。
- すばやく行うことができる。
- この評価法は「規準」に大きく依存しており、その規準はあらかじめ決定しておかなくてはならない。

図６　全体論的評価法の特徴（Anson,1997,p.89）

この中で特に図６における「この評価法は『規準』に大きく依存しており、その規準はあらかじめ決定しておかなくてはならない」という指摘は、全体論的評価法の特質を非常によく表している。生徒の記述を見ていく際には必ず「どのような観点から評価していくのか」という『規準』を明らかにしておかなくてはならない。しかし同じ記述を評価していく際にも、例えば「順序だった記述がなされているか」「事実をきちんと説明できているか」「用語を正しく使えているか」「新しいアイデアが盛り込まれているか」「心情がよく表れているか」など、その評価の観点は様々に存在するはずである。つまり、どのような観点で評価を行うかについて予め『規準』を作成しておくことにより、様々な観点から全体論的評価を行うことが可能となり、一つの記述について多方面からの評価

が可能となるのである。

そして設定された規準をより具体化し、実際の評価を行う際の指標としたものがルブリック(rubric)である。Ainsworth et. al.(1998)はルブリックの一般例を表１のようにあげている。

表１　ルブリックの一般例（Ainsworth et. al.,1998,p.5）

Wow	Pretty Good	Needs Work
・Lots of showing ・Interesting to read ・Clear story	・A little showing ・Most parts are interesting ・Most of it is clear ・Handwriting is easy to read ・A few spelling errors	・No showing ・Not very interesting ・Many confusing parts

そして算数･数学教育における記述表現に対して､ルブリックを用いた全体論的評価法の事例として、５年生の「割合」の課題を例にとり図７ように説明している。

学年：５年生

課題に対する評価規準

1. 割合に関する用語を見いだすために割合概念を用いているか
2. 最も得な買い物を見いだすために割合を用いているか

課題

割合の概念を用いて、以下に示す箱入りのレーズンの中で最も得なものがどれであるかを考えなさい。自分の考えを説明するために、ポスターを作成すること。

ルブリック

A：正しい答えを得ている。正答に対して分かりやすい説明をしている。ポスター形式の見やすい作品に仕上がっている。完成度が高く簡潔にまとまっている。

B：正しい答えを得ている。正答に対して分かりやすい説明をしている。もう少し簡潔にして完成度を高めた方がよい。細かいところが抜けている。

C：誤った答えを得ている。答えに対する説明が分かりにくい。簡潔にまとまっておらず、ポスターのようには見えない。

D：誤った答えを得ている。不完全であり、重要な事柄が抜けている。課題の指示に従っていない。

図７　全体論的評価の事例（Ainsworth et. al.,1998,p.94）

このような課題に対して児童が書いた具体的な記述の一つは図８のように示され､「A 段階のすべての規準を満たしている」ことからこの児童の記述を A 段階のものとして評価している。

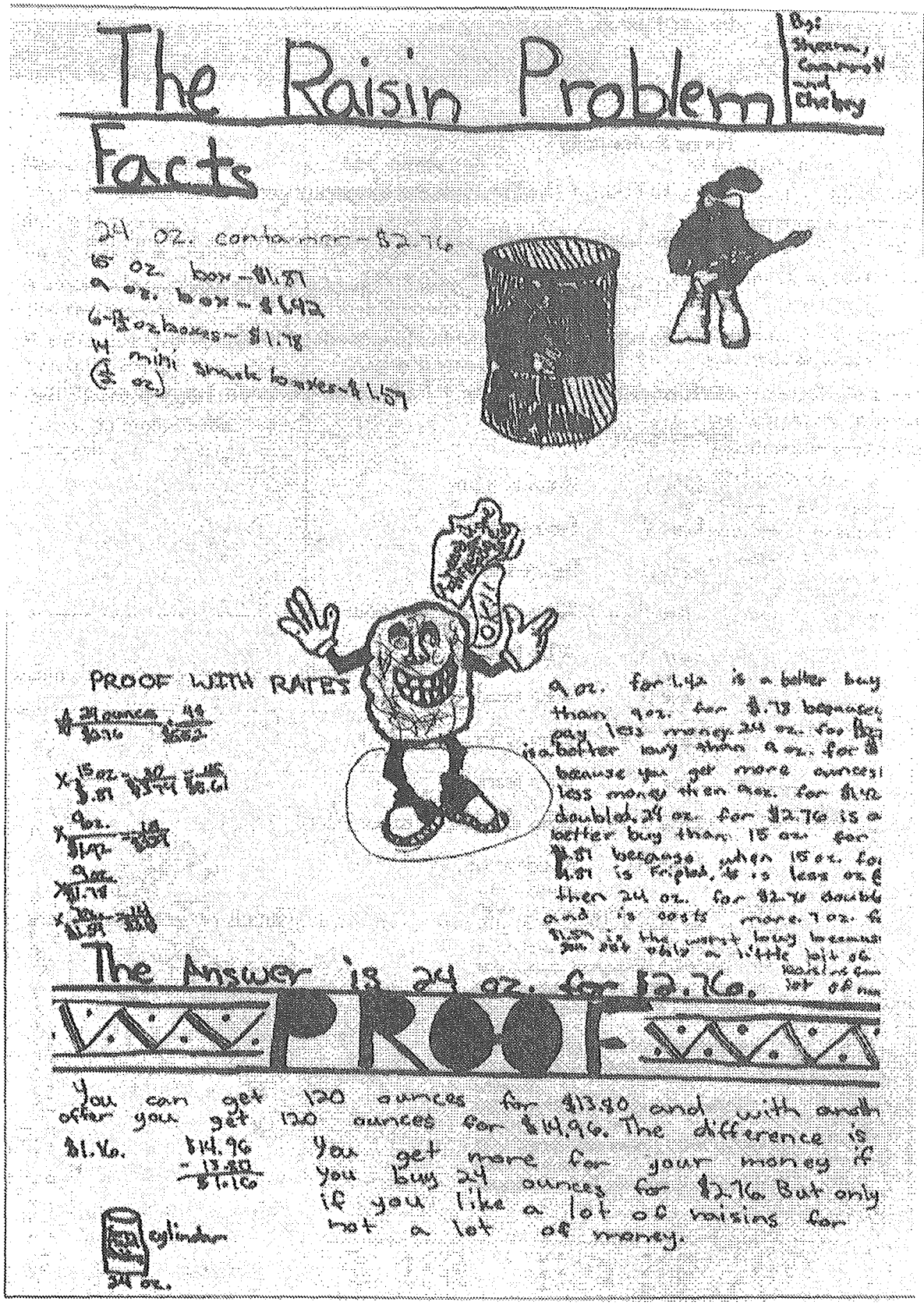
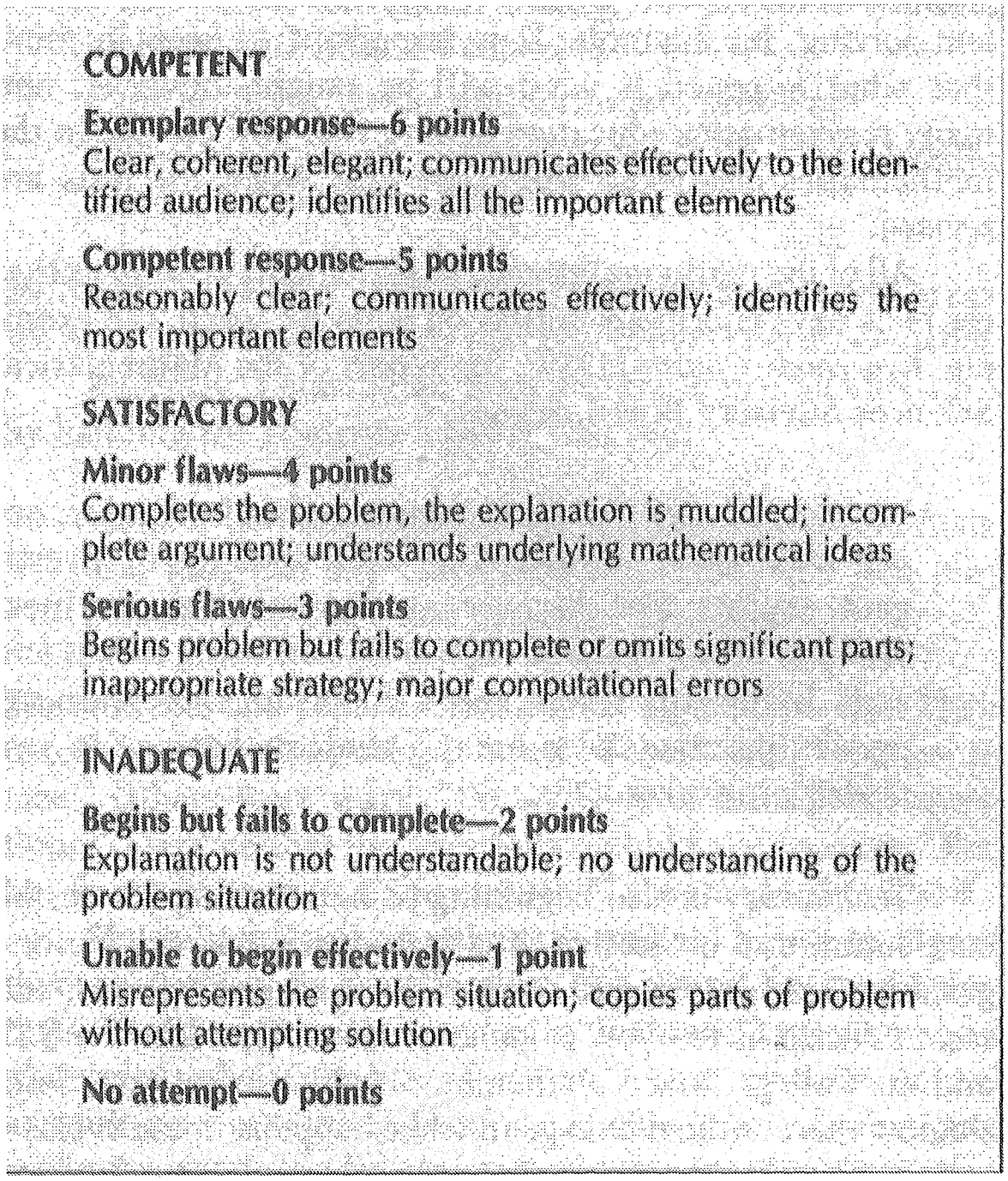


図8　児童の記述の事例（Ainsworth et. al.,1998,p.95）

また Countryman(1992)では、California 州で採用された新しい評価法として、オープンエンドな課題に対してルブリックを用いて評価する方法が紹介されている(pp.78-79)。ここでは、

California 州で用いられいる「一般的なルブリック(general scoring rubric)」が図９のように示されている。



COMPETENT

Exemplary response—6 points
Clear, coherent, elegant; communicates effectively to the identified audience; identifies all the important elements

Competent response—5 points
Reasonably clear; communicates effectively; identifies the most important elements

SATISFACTORY

Minor flaws—4 points
Completes the problem, the explanation is muddled; incomplete argument; understands underlying mathematical ideas

Serious flaws—3 points
Begins problem but fails to complete or omits significant parts; inappropriate strategy; major computational errors

INADEQUATE

Begins but fails to complete—2 points
Explanation is not understandable; no understanding of the problem situation

Unable to begin effectively—1 point
Misrepresents the problem situation; copies parts of problem without attempting solution

No attempt—0 points

図９　The general scoring rubric in use in California（Countryman,1992,p.79）

さらに、NCTM スタンダード準拠カリキュラムのひとつである「Interactive Mathematics Program (IMP)」カリキュラムには、ルブリックを用いた全体論的評価法を生徒に指導するための教材がある(Fendel et. al.,1998(C))。この教材は、生徒が自分たちの記述表現を実際に評価することで数学的記述表現の評価法を学ぶものである。そして質の高い数学的記述表現の要件を見出すことを通して、生徒が自らの数学的記述表現の質を向上させることを目指している。Fendel et.

al.(1998(C))は全体論的評価法を「採点項目を個々の作業ごとにポイント制で評価するのではなく、全体として評価していく」ものとして特徴づけている。そしてその一例として6点満点の尺度を用い、その大まかな分類を図10のようにしている。

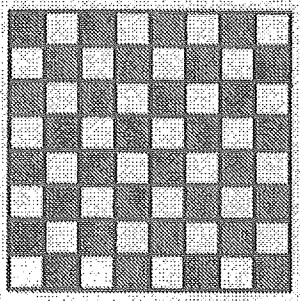
0点～2点：要点がまとめられていない答案
3点～4点：必要要件を満たしている答案
5点～6点：特に素晴らしい水準の答案

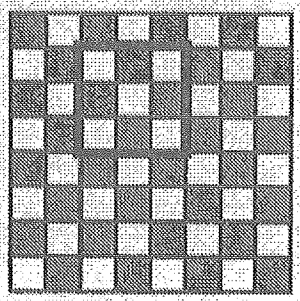
図10　6点満点の尺度の大まかな分類（Fendel et. al.,1998(C),p.8)

また、図11に示すような、8×8の桝目でできているチェスボードの中にある様々な大きさの正方形の総和を求める問題（「チェスボードの正方形」問題）を例にとり、この課題についての記述表現を評価するための具体的規準の記述尺度として図12のようなルブリックを示している。

Checkerboard Squares

The picture at the left below shows a standard 8-by-8 checkerboard, made up of 64 small squares. But there are many other squares within the checkerboard, of various sizes, made up of these smaller squares. For example, the diagram at the right below shows a 3-by-3 square outlined within the larger checkerboard. (This is just one of many 3-by-3 squares.)





The first question of this activity is this:

1. How many squares are there altogether on the checkerboard (including the 64 small squares)?

When you are confident that you have counted all the possible squares on the 8-by-8 checkerboard, move on to the next question.

2. Suppose you have a square checkerboard of some other size—not 8-by-8. How can you determine how many different squares are on it altogether?

   You will know you are done with this question when you are confident that no matter what size checkerboard you are given, you can quickly and easily compute the total number of squares.

図11　「チェスボードの正方形」問題（Fendel et. al.,1998(C),p.5)

0ポイント：全く記述がなかったり、何も議論をせずに単に答えのみを書いている場合。
1ポイント：何らかの記述をしようと試みているが、全く問題を理解していない場合。問題をきちんと説明はしているが、それ以上の進展が無い場合。
2ポイント：問題を解き始め、1×1から8×8までの異なる大きさの正方形があることについて触れているもの。ただし、それ以上の進展はない。答案には図がかかれている。
3ポイント：問題への理解を示し、それを探究するための道具（方法）を示している場合。探究が不完全で結論が間違っていてもかまわない。
4ポイント：最後まで説明ができていて、明確な説明とともに正答が得られている場合。(単純な計算ミスは許されるものとする。) 答案には、どんなパターンが発見されたかが適切な説明とともに示されている。
5ポイント：何らかの問題の拡張が示されている場合。答案には、最小の正方形から最大の正方形まで（或いはその逆）の経過が図に示され、それぞれの大きさの正方形がどのように数え上げられたかについて詳しい説明がなされている。それぞれの大きさの正方形の個数は2乗の数になっており、このことがどのようにしてパターン化されたかについても説明されている。
6ポイント：様々なサイズのチェスボードにおける正方形の数の見つけ方へと一般化している。そして記述表現がきちんとなされている。答案には、解答が総和(summation)であることが明確に記述されている。特殊なケースについて与えられたどんな整数の答えに対しても、それを正当化できる。すべての記述が適切な例とともになされている。

図12　ルブリックの具体例（Fendel et. al.,1998(C),p.12の日本語訳）

そしてこのように作成されたルブリックをもとに、モデル答案の選択、判断の規範づくりなどが進められる。

これらの先行研究における全体論的評価法に関する記述をもとに考察すると、図13に示すような「数学的記述表現の全体論的評価法の枠組み」が構築される。

(1) 課題の内容に即した「評価規準」を設定する。評価規準は課題を提示する際に児童・生徒に示し、よりよい記述表現活動が行われるよう促す。
(2) 評価規準に従い、ルブリックを作成する。
(3) モデル答案を複数選び、評価判断の規範を定める。
(4) 評価を行う。　尚、判断に困るものは最後に再度検討する。

図13　数学的記述表現の全体論的評価法の枠組み

4．離散数学の学習における記述表現の評価の事例

本小節では、鳩ノ巣原理を題材とした研究授業(3)において実際に用いられた問題を取り上げ、生徒の実際の記述を具体例として、全体論的評価の事例を提案したい。この授業では、鳩ノ巣原理の導入がなされた後、その応用として図14のような問題がだされた。

1年C組あ組生徒14人の中には、同じ星座の生徒が必ずいることを証明せよ。

図14　鳩ノ巣原理の応用問題

図15は、ある生徒の解答である。

星座は12種類あるので、14人の生徒の内、2人はだぶる。よって、同じ星座の人は必ず2人以上いる。(鳩ノ巣原理により)

図15　ある生徒のワークシートにおける解答

他にも様々な解答が想定されるが、例えば図16に示すようなルブリックを作成し、生徒の記述を全体論的評価法によって評価することを提案したい。

0ポイント：全く記述がなかったり、何も議論をせずに単に結論のみを書いているもの。 1ポイント：何らかの説明をしようと試みているが、鳩ノ巣原理を適用しているとは見なせないもの。状況の説明はなされているが、その理由が明確ではないもの。 2ポイント：鳩ノ巣原理に言及し問題場面に適用しようとしているが、その論拠が不明確なもの。 3ポイント：問題場面に鳩ノ巣原理を適用しているもの。鳩ノ巣原理は概ね理解していると思われるが、「鳩」と「巣」に相等するものがそれぞれ何であるのかを明確に説明できていない。 4ポイント：「鳩」と「巣」に相等するものがそれぞれ何であるのかを明確に説明した上で、鳩ノ巣原理を問題場面に適用しているもの。

図16　鳩ノ巣原理の問題に対する記述を評価するためのルブリック(案)

図15に示した生徒の解答は、図16のルブリックにあてはめて全体論的評価を行うと、3ポイントとして評価される。

5．おわりに

本稿では、離散数学を課題とする学習活動において生徒は「言葉での説明」を有効に活用し表現していくことが求められてくるとの想定のもと、数学教育における記述表現についての先行研究、並びに具体的な事例について検討した。更に、記述表現を評価する枠組みとして「全体論的評価法」について考察し、具体的事例として鳩ノ巣原理の事例を取り上げた。そして、具体的問題例と生徒の記述に対するルブリック(案)を示すことで、全体論的評価法の具体例を提案した。

今後の課題として、多くの実践を通して生徒の活動(記述)の事例を収集しその詳細を分析することで、以下の諸点を解決することがあげられる。

① 離散数学の学習活動において生徒がどのような学習活動(記述活動)を行うべきであるかの規範を確立させること。
② 生徒の学習活動の様相の分析を通して、学習課題（数学的内容、並びに生徒への提示のしかた）について更なる精査を行うこと。
③ 生徒の記述を評価する記述尺度(ルブリック)の確立。特に、生徒の実際の記述の様相に即した記

述尺度の事例を集めること。

④ これらの課題の検討を進めていくための前提として、学習活動における「思考」と「記述」との間の関係についての捉え直し、「表現(記述)すること」をより重視した学習指導を進めていくこと。

注

(1) アメリカ ミネソタ州 Maplewood 郡、John Glenn Middle School、Judy Rohde 教諭の実践から。

(2) アメリカ ミネソタ州 Minneapolis、Patrick Henry High School、Jane Kostic 教諭の実践から。

(3) 平成 18 年 12 月 18 日、東京都立芝商業高等学校 1 年 B 組の授業（茂出木祥高教諭）から。

文献

景山三平(2006)「高校へ導入する離散数学の有効性について」『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究(B)（課題番号：16300258）報告書, pp.10-24

長尾篤志・長崎栄三(2006)「高校数学への離散数学の導入に関する基本的な考え方」『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究』日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究(B)（課題番号：16300258）報告書, pp.3-9

二宮裕之(2005)『数学教育における内省的記述表現活動に関する研究』風間書房

Ainsworth,Larry et. al.(1998), *Student-Generated Rubrics*, Dale Seymour Publications

Anson,Chris M.(1997), *Reading Packet 1997 Summer Institute for Teachers Eng. W5210*, University of Minnesota

Billstein,Rick et. al.(1999), *Middle Grades MathThematics: The STEM Project Book 2*, McDougal Littell

Countryman,Joan(1992), *Writing to Learn Mathematics*, Heinemann

Fendel,Dan et. al.(1998(a)), *Solve It! Teacher's Guide*, Interactive Mathematics Program Year 2, Key Curriculum Press

Fendel,Dan et. al.(1998(b)), *Interactive Mathematics Program Year 2*, Key Curriculum Press

Fendel,Dan et. al.(1998(C)), *It's All Write - A Writing Supplement for High School Mathematics Classes*, Key Curriculum Press

Green,L.(1997), *Teaching Handbook for the Interactive Mathematics Program*, Key Curriculum Press

NCTM(1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics

NCTM(1995), *Assessment Standards For School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics

高等学校における
離散数学を中心とした新たな教材の開発研究
平成19年3月30日発行

〒153 - 8681　目黒区下目黒6－5－22
国立教育政策研究所
研究代表者　長崎　栄三

印刷所：チヨダクレス株式会社